34 Mathematik

Romain Büchi

Als nach jahrelanger Arbeit Whiteheads mathematisches Hauptwerk *A Treatise on Universal Algebra with Applications* 1898 erscheint, befindet sich die Algebra inmitten ihrer modernen Selbstwerdung. Seit jeher mit der Lösung polynomialer Gleichungen befasst, befreit sie sich im Verlauf des 19. Jahrhunderts zunehmend von der engen Anbindung an die Arithmetik und damit einhergehend von der Fixierung auf die numerische Interpretation ihrer Symbole. Versehen mit einem nunmehr eigenen, dafür abstrakteren Gegenstand, reift sie zu einer eigenständigen Disziplin heran, die losgelöst von ihren Anwendungen betrieben wird (vgl. Bourbaki 2007).

Eine Wende in dieser alles andere als linearen Entwicklung bezeichnet das Aufkommen der modernen Algebra ab den 1920er-Jahren (Alten/Djafari Naini/Eick et al. 2014, Kap. 7–10). Von der Göttinger Mathematikerin Emmy Noether und ihrer Schule begründet, untersucht die moderne Algebra mannigfaltige algebraische Strukturen – insbesondere Gruppen, Ringe, Körper, Algebren – nach der von David Hilbert hochgehaltenen axiomatischen Methode (Koreuber 2015). Ansätze dieser Methode finden sich bei Whitehead bereits im *Treatise* (Lutskanov 2011, 167–170). Die reine Mathematik wird darin als formales, notwendiges und deduktives Schließen charakterisiert, das von definitorischen Prinzipien ausgehe, deren Auswahl einzig dem Kriterium der Widerspruchsfreiheit verpflichtet sei, und regelgeleitet zu Sätzen fortschreite, ohne dabei auf ihre Bedeutung achten zu müssen, sondern allein unter Beachtung der schlussrelevanten Beziehungen zwischen ihnen (TUA, vi). Das erste Buch des *Treatise* behandelt denn auch losgelöst von jeglicher Interpretation der verwendeten Symbole die allgemeinen, gleichsam das Spielfeld der universalen Algebra aufspannenden Prinzipien jener beiden Operationen, die in jeder speziellen Algebra auftreten und als Addition und Multiplikation bezeichnet werden (TUA, § 12).

Obschon Whiteheads Arbeit zu Recht als Pionierleistung auf ihrem Gebiet bezeichnet (Quine 1941) und in zeitgenössischen Rezensionen durchaus als solche gewürdigt worden ist (Grattan-Guinness 2002, 430), ließe sie sich gleichwohl nur mit Gewalt unter den Begriff der modernen Algebra bringen. Wie es der vollständige Titel der Schrift schon ankündigt, erfolgt die Untersuchung der speziellen Algebren im strikten Zusammenhang mit den wichtigsten ihrer möglichen Anwendungen, was aufgrund des Umstands, dass sich jede untersuchte Algebra einer räumlichen Interpretation zuführen lässt, das bemerkenswerte Ergebnis zeitigt, wonach eine Abhandlung in universaler Algebra zugleich eine Abhandlung über gewisse verallgemeinerte

R. Büchi (✉)
Universität Genf, Genf, Schweiz

T. Röck, M. Schramm (Hrsg.), *Whitehead-Handbuch*, https://doi.org/10.1007/978-3-476-06012-9_34

Raumbegriffe darstelle (TUA, § 22). Auch in historischer Perspektive tritt der *Treatise* nicht als Wegbereiter der modernen Algebra in Erscheinung (Birkhoff 1987, 568 [48]), sondern vielmehr als vorläufiger Abschluss einer Traditionslinie, die mit einer Reihe neuartiger, um die Jahrhundertmitte entwickelter Theorien – u.a. William Hamiltons Theorie der Quaternionen (1843), Hermann Graßmanns Ausdehnungslehre (1844) und George Booles Algebra der Logik (1847) – ihren Anfang genommen hatte (Bourbaki 2007, 73–75).

Diese Verknüpfung von universaler Algebra und geometrischer Interpretation ist sicherlich auch dem prägenden Einfluss Graßmanns geschuldet (Dawson 2008, 72–73), der seine Ausdehnungslehre als Teildisziplin einer neuen mathematischen Wissenschaft erdacht und mit der Aufgabe betraut hatte, der Geometrie wie auch der Bewegungslehre und Mechanik als abstrakte, von allem Sinnlichen bereinigte Grundlage zu dienen (Graßmann 1878, XXII–XXIII, §§ 13, 21–23). Die Darstellung der allgemeinen Grundzüge dieser neuen, ‚Formenlehre' getauften Wissenschaft stellt Graßmann, wie Whitehead nach ihm (TUA, 32), allem anderen voran und unterteilt dann auch jedes weitere Kapitel seines Buchs in einen ersten, die theoretische Entwicklung enthaltenden und einen zweiten, die Anwendungen aufzeigenden Abschnitt. Gerade bei der Einführung einer neuen Wissenschaft sei es unumgänglich notwendig, sogleich ihre „Anwendung und ihre Beziehung zu verwandten Gegenständen zu zeigen" (Graßmann 1878, XII).

Maßgebend für Whiteheads mathematische Behandlung und Erweiterung der Ausdehnungslehre ist indes Graßmanns zweite Fassung derselben von 1862 (TUA, x), die er wegen mangelnder Resonanz der ersten Auflage der üblichen mathematischen Darstellungsweise entsprechender gestaltete (Crowe 1985, 65, 90). Die begriffliche Grundlage dieser ‚zweiten' Ausdehnungslehre bilden die extensiven Größen, von denen sich eine jede durch Addition und skalare Vervielfachung der zusammen ein System von unabhängigen Einheiten bildenden Basiselemente gewinnen lässt und die, bei einem n Elemente zählenden System von Einheiten, zusammen ein Gebiet n-ter Stufe – man ist aus heutiger Sicht versucht zu sagen: einen n-dimensionalen Vektorraum (Alten/Djafari Naini/Eick et al. 2014, 451–452; vgl. jedoch Gandon 2005, 114) – aufspannen. Whitehead integriert diese Grundlage in eine verallgemeinerte Auffassung beliebig dimensionaler Räume ohne Distanzbegriff (TUA, ix) und bringt sie unter den weit gefassten, in Teilen von Bernhard Riemann entlehnten Begriff der positionalen Mannigfaltigkeit (TUA, §§ 8, 61). Bei der Einführung multiplikativer Operationen zwischen Elementen solcher Mannigfaltigkeiten (TUA, §§ 91–107) folgt Whitehead wiederum den bahnbrechenden Bestimmungen der Ausdehnungslehre, erweitert jedoch das sog. innere Produkt wesentlich (TUA, §§ 110, 117). Es stellt sich die Frage, ob diese Erweiterung dazu dienen sollte, eine im letzten Kapitel des Buchs angedeutete, eigentlich aber auf den nie erschienenen zweiten Band des *Treatise* vertagte Einbettung von Hamiltons Quaternionen in die Ausdehnungslehre vorzubereiten und damit einen Ausweg aus der Fehde zwischen Graßmannianern und Quaternisten (Crowe 1985, Kap. 6) aufzuzeigen.

Indem Whitehead bei der Einführung seiner Grundbegriffe überdies die Möglichkeit vorsieht, die Elemente von Mannigfaltigkeiten mit einer skalaren Intensität als sekundärer Eigenschaft zu versehen (TUA, § 9), und bei der weiteren Bestimmung des Intensitätsbegriffs über Graßmann hinausgeht (TUA, §§ 85–90), bereitet er den Boden für die Anwendung der Ausdehnungslehre auf nichteuklidische Geometrien, insbesondere auf elliptische und hyperbolische Varianten (Gandon 2005). Augenscheinlich soll Graßmanns Theorie den umbruchartigen Entwicklungen angepasst werden, die etwa seit der Jahrhundertmitte – Whitehead selbst unterteilt die Entwicklungen, Felix Klein folgend, in drei Phasen (TUA, 369–370; vgl. auch ESP, 295–311) – das altehrwürdige Paradigma gesicherten Wissens, die euklidische Geometrie als die Theorie des Raumes, heimsuchen (Torretti 1978). Über dieses Paradigma wird Whitehead, der sich schon früh in seiner Laufbahn den nichteuklidischen Geometrien zugewandt und als einer der ersten in Cambridge dazu gelehrt hatte (Lowe 1985, 153), sagen, es sei ein Irrtum gewesen, wenngleich ein glorreicher, denn er habe über 2400 Jahre lang den Fortschritt der Wissenschaft beflügelt (ESP, 77).

Den Göttinger Vorlesungen und Schriften Kleins über nichteuklidische Geometrie folgt Whitehead auch in dem Bestreben, bei der allem anderen voranzustellenden Darstellung der projektiven Geometrie so weit wie möglich ohne Distanzbegriff auszukommen. Erst wenn sich die Hinzunahme von metrischen als unter projektiven Abbildungen nicht invarianten Beziehungen aufzwingt, wird der Distanzbegriff nach der von Arthur Cayley entwickelten und von Klein auf die nichteuklidischen Fälle erweiterten Methode eingeführt (TUA, § 199; Dawson 2008, 69). Dasselbe Vorgehen zeichnet auch die beiden kurz nacheinander erschienenen und zusammen eine Einheit bildenden Traktate zur projektiven und deskriptiven Geometrie aus (APG und ADG). In ihrem streng axiomatischen Aufbau und modern lakonischen Stil unterscheiden sie sich gleichwohl deutlich von der vergleichenden und historisch informierten Betrachtungsweise des *Treatise* (Barrow-Green & Gray 2006, 332). Neben Hilbert, auf dessen wegweisende Schrift über die Grundlagen der Geometrie in beiden Traktaten Bezug genommen wird, sind für die Darstellung der projektiven Geometrie die Arbeiten Mario Pieris, eines Mitstreiters Guiseppe Peanos, maßgebend, dessen Axiome für die projektive Ebene übernommen werden (APG, § 4), während dem zweiten Teil zur deskriptiven Geometrie die äquivalenten Axiomensysteme Peanos (ADG, § 3) und Oswald Veblens (ADG, § 8) zugrunde liegen.

Infolge der Auseinandersetzung mit der italienischen Schule um Peano setzt sich Whitehead vertieft mit der allmählich an Ansehen gewinnenden Mengenlehre Georg Cantors auseinander. Nicht nur in seinen geometrischen Arbeiten bedient er sich zunehmend mengentheoretischer Werkzeuge (Grattan-Guinness 2002, 457), sondern bereits zu Beginn seiner Zusammenarbeit mit Bertrand Russell, aus der die ersten drei Bände der *Principia Mathematica* hervorgehen sollten, wendet sich Whitehead der kardinalen Arithmetik zu. Es folgen ein Aufsatz (1902) und ein kurzer Nachtrag (1904), worin u.a. eine über Cantors Definitionen hinausgehende, weil auch bei unendlicher Faktorenzahl anwendbare Bestimmung des Mengenprodukts vorgeschlagen (Lowe 1985, 260–262) und überhaupt die hauptsächlich durch Whitehead geleistete Entwicklung der kardinalen Arithmetik im zweiten Band der *Principia* vorbereitet werden (Russell 1948; Quine 1941, 158).

Ungeachtet dieser Ausflüge in das Gebiet der Arithmetik dürfte Russell mit der Bemerkung, wonach Whiteheads Interesse für Geometrisches stets überwog (Lowe 1985, 192), nicht falsch gelegen haben. Der vierte, von Whitehead allein zu besorgende Band ihres bis dahin kollaborativ erstellten Monumentalwerks hätte das Gebiet der Geometrie abgedeckt. Dem Plan nach, und in dieser Reihenfolge, waren je ein Kapitel über projektive, deskriptive und metrische Geometrie wie auch eines zu Raumkonstruktionen vorgesehen (Grattan-Guinness 2002, 448–449). Sowohl vor als auch nach Fertigstellung der ersten drei Bände erscheinen mehrere Vorarbeiten zu dem wohl begonnenen, aber nie zu Ende geführten vierten Band der *Principia*, darunter ein langer und schwieriger Aufsatz, worin Whitehead seinen ersten Versuch unternimmt, das geballte, ihm zur Verfügung stehende logisch-geometrische Instrumentarium für die mathematisch exakte Ausformulierung verschiedener Konzeptionen der Welt bewegter Materie einzusetzen (MCMW, 465–466).

Mehr noch als die bemerkenswerte Fülle der in diesem schwierigen Aufsatz enthaltenen Begriffe, Methoden und Positionen – etwa die Definition von Raumpunkten in der „Theory of Dimensions“ und in der „Theory of Interpoints“ (Grattan-Guinness 2002, 437–440), der erste Entwurf seiner Methode der extensiven Abstraktion (Lowe 1985, 301) oder auch die monistische Aufhebung der Unterscheidung von Raum- und Massepunkten (Gandon 2005, 122–123) – besticht vor allem die dargebotene Perspektive auf den mathematischen Teil von Whiteheads Lebenswerk. In seiner komplexen Einheit nachgerade erhaben, erscheint es insgesamt und hauptsächlich als der Versuch, die zeitgenössische Physik und insbesondere den Gegenstand seiner Dissertation, Clerk Maxwells Theorie des Elektromagnetismus, mit einer angemessenen mathematischen Grundlage zu versehen (Dawson 2008).

Literatur

Alten, Heinz-Wilhelm/Djafari Naini, Alireza/Eick, Bettina/Folkerts, Menso/Schlosser, Hartmut/Schlote, Karl-Heinz/Wesemüller-Kock, Heiko/Wußing, Hans (Hg.): 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kulturen – Menschen. Berlin [2]2014.

Barrow-Green, June/Gray, Jeremy: Geometry at Cambridge, 1863–1940. In: Historia Mathematica 33 (2006), 315–356.

Birkhoff, Garrett: The rise of modern algebra to 1936 [1976]. In: Rota, Gian-Carlo/Oliveira, Joseph S. (Eds.): Selected papers on algebra and topology by Garrett Birkhoff. Boston 1987, 561–583.

Bourbaki, Nicolas: Éléments d'histoire des mathématiques. Berlin 2007.

Crowe, Michael J.: A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system. New York 1985.

Dawson, Andrew: Whitehead's Universal Algebra. In: Weber, Michel/Desmond, Will (Eds.): Handbook of Whiteheadian process thought, Vol. 2. Frankfurt a.M. 2008, 67–86.

Gandon, Sébastien: Algèbre, géométrie et loi d'intensité: l'enjeu de ‚A Treatrise on Universal Algebra'. In: Weber, Michel/d'Eprémesnil, Diane (Ed.): Chromatikon I, Annuaire de la philosophie en procès – Yearbook of Philosophy in Process. Louvain-la-Neuve 2005, 113–124.

Graßmann, Hermann: Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig [1844] [2]1878.

Grattan-Guinness, Ivor: Algebras, projective geometry, mathematical logic, and constructing the world: Intersections in the philosophy of mathematics of A. N. Whitehead. In: Historia Mathematica 29 (2002), 427–462.

Koreuber, Mechthild: Emmy Noether, die Noether-Schule und die moderne Algebra. Zur Geschichte einer kulturellen Bewegung. Berlin 2015.

Lowe, Victor: Alfred North Whitehead. The Man and His Work. Vol. 1. Baltimore 1985.

Lutskanov, Rosen: Whitehead's Early Philosophy of Mathematics and the Development of Formalism. In: Logique et Analyse 54/214 (2011), 161–172.

Quine, Willard V. O.: Whitehead and the rise of modern logic. In: Schilpp, Paul A. (Ed.): The philosophy of Alfred North Whitehead. Evanston 1941, 127–163.

Russell, Bertrand: Whitehead and Principia Mathematica. In: Mind 57/225 (1948), 137–138.

Torretti, Roberto: Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré. Dordrecht 1978.