# SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 18 • 2024

## Mit Beiträgen von

**R. Büchi | O. Ebbers | J. Franke-Reddig | K. Richter & T. Reimers | S. Spies | N. Strobach**

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

# SieB

## Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

## Band 18 (2024)

Mit Beiträgen von:
Romain Büchi | Oliver Ebbers | Julia Franke-Reddig
Karin Richter & Toni Reimers | Susanne Spies | Niko Strobach

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 18 (2024)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)



univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2024



Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

# Inhaltsverzeichnis

# Über Beweis, Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik

## Romain Büchi

Es ist nicht leicht, sich dem Beweisen philosophisch zu nähern, ohne sogleich in schwierige Aporien zu geraten, sei es über Wahrheit in der Mathematik, die besondere Gewissheit ihrer Sätze oder über den Beweisbegriff selbst. Wer aber verstehen will, was die Mathematik auszeichnet, wird nicht umhinkommen, mathematisches Beweisen näher zu untersuchen. Denn in den mitunter erstaunlichen Hervorbringungen dieser Tätigkeit zeigt sich der eigentümliche Charakter der Disziplin. Mathematische Beweise verleihen den Aussagen, die sie beweisen, eine Gewissheit, die ihresgleichen sucht und in anderen Disziplinen die nicht selten vergebliche Hoffnung nährt, Vergleichbares müsse auch auf ihrem Gebiet möglich sein. Doch so verlockend sich die damit verbundenen Verheissungen ausnehmen, über das Wesen mathematischer Gewissheit herrscht mehr Verwirrung als Einigkeit.

Gewichtige Stimmen halten es überhaupt für verfehlt, die Sätze der Mathematik unter eine eigene Gattung der Erkenntnis zu stellen. Wie in allen Wissenschaften seien die Prämissen und Konklusionen mathematischer Forschung, so gesichert und einleuchtend sie erscheinen mögen, im Prinzip revidierbar. Der Schein von Unbezweifelbarkeit, der gewisse Sätze umgibt, sei weder ihrem Gegenstand noch ihrer besonderen Begründungsweise geschuldet, sondern letztlich ihrer zentralen Stellung im derzeitigen Netz wissenschaftlicher Begriffe und Theorien.[1] Unter denen, die dagegen an der prinzipiellen Sonderstellung der Mathematik und an der besonderen Gewissheit ihrer Sätze festhalten wollen, herrscht indes tiefe Uneinigkeit. Die einen glauben, dass die Mathematik von idealen Sachverhalten handelt, die in einer abgetrennten Sphäre ihr zeitloses, mithin unveränderliches Fortbestehen fristen. Von den anderen Wissenschaften würde sich die Mathematik primär

[1] Für klassische Formulierungen der hier angedeuteten Positionen, vgl. Lakatos (1976) sowie Quine (1951) und Quine (1986).

SieB 18 (2024), 5-38

durch die Natur ihres Gegenstands unterscheiden, nicht durch die Art und Weise, wie sie zu ihren Wahrheiten findet. Wie es dem menschlichen Verstand aber gelingen soll, sich Zugang zu diesem Himmelreich zu verschaffen und Gewissheit über seinen Aufbau zu erlangen, bleibt ein grosses Rätsel.[2] Von der Gegenseite wird zudem moniert, dass die Entkoppelung des Wahrheitsbegriffs von den zur Verfügung stehenden Mitteln der Wahrheitsfindung in die Irre führt. Dadurch werde man gezwungen, die Möglichkeit von Wahrheiten einzuräumen, für die unser beschränkter Intellekt ausserstande wäre, je einen Beweis zu geben.[3] Die Lösung kann gleichwohl nicht darin bestehen, die Wahrheit einer Aussage am Vorliegen eines Beweises festzumachen. Sonst müsste es ganz sinnlos erscheinen, unbewiesene Aussagen mathematischen Inhalts für wahrscheinlich wahr zu halten. Vermutungen aufzustellen, ist aber ein wesentlicher Bestandteil mathematischer Praxis und aus ihr nicht wegzudenken. Der Blick in diese Praxis offenbart ausserdem, dass Beweise nicht allein der Wahrheitsfindung dienen. Gerade wichtige Theoreme werden immer wieder aufs Neue bewiesen, etwa mit anderen Mitteln oder auf elegantere Weise. Offenbar erfüllt das Beweisen noch weitere epistemische Funktionen, die für das Fortschreiten der mathematischen Wissenschaft mindestens ebenso bedeutsam sind. Diese Einsicht verträgt sich allerdings nicht gut mit der Doktrin, wonach sich das Wesen mathematischer Beweise in ihrer formalen Gültigkeit erschöpfe, da einem Beweis durch seine Formalisierung typischerweise jene Eigenschaften genommen werden, die diese weitergehenden Funktionen erst möglich machten. So kommt es, dass selbst über die Frage, was einen mathematischen Beweis im Wesentlichen ausmacht, die Ansichten weit auseinandergehen.

Das gleich Folgende ist der Versuch, einen Überblick zu gewinnen, ohne sich zu weit in Probleme hineinziehen zu lassen, deren zufriedenstellende Behandlung hier nicht zu leisten ist. Behandelt werden vier zusammenhängende Fragen, jede in einem eigenen Abschnitt: *1. Was ist ein mathematischer Beweis? 2. Wie hängen in der Mathematik Beweis und Wahrheit zusammen? 3. Wozu dienen Beweise in der Mathematik? 4. Worin besteht die besondere Gewissheit mathematischer Sätze?* Jeder Abschnitt beginnt mit einem kursiv gesetzten Absatz, der die gestellte Frage in wenigen Worten beantwortet. Die gegebene Antwort wird daraufhin in Rückgriff auf ausgewählte Stellen aus neueren und älteren Quellen kommentiert.[4]

Mit der praktischen Wende in der Philosophie der Mathematik ist die Literatur

[2] Für eine einflussreiche und noch immer lesenswerte Besprechung platonistischer Tendenzen in der Mathematik, vgl. Bernays (1935); für einen aktuellen Überblick über platonistische Positionen in der Philosophie der Mathematik, vgl. Linnebo (2024).

[3] Siehe Anm. 40.

[4] Wer sich also einen raschen Überblick über den Inhalt des Papiers verschaffen möchte oder eine Zusammenfassung sucht, lese die zwei Seiten Einleitung und im Anschluss daran die kursiv gesetzten Absätze zu Beginn jedes Abschnitts.

über die Praxis des Beweisens und ihre tatsächlichen Erzeugnisse, d. s. zumeist nicht-formale Beweise, sprunghaft angewachsen.[5] Auf einen Teil dieser neueren Arbeiten wird im Folgenden auch verwiesen. Dennoch sollte nicht übersehen werden, dass sich die Philosophie seit ihren Anfängen, und besonders zu Beginn des 20. Jahrhunderts, mit der mathematischen Beweispraxis befasst hat. Über vieles, was uns heute wieder rätselhaft und schwierig erscheint, wurde schon einmal scharf nachgedacht. Es lohnt sich daher, auch bei älteren Vertretern oder Kritikern klassischer Positionen nachzulesen, was sie über das Beweisen, über Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik geschrieben haben. Wir werden uns vor allem bei Frege, Wittgenstein und Dummett bedienen.

## 1 Was ist ein mathematischer Beweis?

*Beweisen ist eine Tätigkeit: ein von Regeln geleitetes Voranschreiten auf ein Ziel hin. Das Ziel – die zu beweisende Aussage – kann erreicht oder verfehlt werden. Gelingt es, den Beweisgang aus anerkannten Prämissen ohne Regelbrüche oder unerlaubte Sprünge ins Ziel zu bringen, liegt mit der bereinigten Aufzeichnung der ausgeführten Gedankenbewegungen ein Beweis der Aussage vor. Der Beweis selbst ist keine Bewegung, auch keine Aufführung oder* performance*. Er ist, wie man sagen könnte, das Bild eines gelungenen Beweisgangs.*

Alan Robinson kritisiert zu Recht eine in der Logik verbreitete Sicht, die Beweise nur als syntaktische Gegenstände zu betrachten vermag, als starre Zeichenfolgen, in denen nichts vor sich geht, nichts geschieht. Diese Sichtweise blendet wesentliche Aspekte des Beweisens aus und versperrt, wenn sie die einzige Sichtweise bleibt, das Verständnis für die unterschiedlichen Funktionen, die Beweise im Dienst der Mathematik erfüllen:[6]

> If we confine our attention to proofs in this sense it is as though we only ever experience music in the form of the structured, silent, static scores written down by the composers in the traditional music notation. Studying these scores is of course important, but there is much more to music than descriptive diagrams. There is the entirely different, dynamic, active reality which is the living music. The musical score is just an abstraction from, or a description of, or even an algorithm for generating, the living music – one might almost say, it is a formalization of the music. The music itself is what happens when it is performed,

[5] Für eine aktuelle Bestandesaufnahme, vgl. Kap. VIII in Sriraman (2024).
[6] Robinson (2000, S. 281).

> either in the open and in public in the usual way, or in the private mental performances which some people can conjure up in their musical imaginations.

Beweise sind keine Ansammlungen bedeutungsloser Formen auf Papier, die gewissen syntaktischen Bedingungen genügen. Die Begriffe, die in ihnen vorkommen, sind lebendig durch ihren Gebrauch in der Mathematik.[7] Wenn Robinson aber den Beweis selbst – und nicht wie wir lediglich das Beweisen – als *performance* bestimmt, hat er die Abfolge mentaler Zustände im Sinn, die das individuelle Nachvollziehen eines Beweistextes aus der mathematischen Fachliteratur begleitet: gleichsam die innerlich aufgeführte Sinfonie. Der Beweis wäre demnach primär etwas Subjektives, das in der Fülle seiner partikulären Ausprägung privat bleiben muss: „The real proof is the series of cognitive events called for in the script. [...] As the proof proceeds so do the stages of the evolution of the (subjective) mental state of seeing that, and knowing why, the theorem is true".[8] Um den besonderen Charakter der mathematischen Gewissheit einzufangen, bedarf es aber (wie sich im vierten Abschnitt deutlicher zeigen wird) eines Begriffs, der von allem bloss subjektiv Zugänglichen befreit ist und die Mitteilbarkeit von Beweisen als wesentliches Merkmal enthält.[9] Insofern der mathematische Beweis seinem Wesen nach mitteilbar, mithin verständlich sein muss, lässt er sich durchaus mit anderem *vergleichen*, mit Geschichten etwa oder Musik.[10] Die wahre Herausforderung besteht jedoch darin, Beweise als Wesen *sui generis* zu begreifen. Ihre Einteilung unter eine übergeordnete Gattung kann hilfreich sein, aber nur, wenn diese als

[7] Eine lohnenswerte Frage, der hier nicht nachgegangen werden kann, ist die nach möglichen Anwendungen von Beweisen *ausserhalb* der Mathematik. Ein mathematischer Beweis kann für eine nicht (rein) mathematische Theorie natürlich insofern von Bedeutung sein, als er die Wahrheit eines Satzes zeigt, der in dieser Theorie Anwendung findet. Die Frage ist jedoch, ob auch der Beweis selbst, d. i. der Beweiskörper oder ein Bestandteil daraus, ausserhalb der Mathematik von Nutzen sein kann oder ob sich sein ganzes Leben quasi innerhalb der Mauern dieser einen Wissenschaft abspielt. Zu untersuchen wäre unter anderem, ob und, wenn ja, wie sich Beweise bei der Entwicklung von Algorithmen in den Computerwissenschaften als nützlich erwiesen haben. Vgl. dazu weiterführend Rota (1997, S. 189-192).

[8] Robinson (2000, S. 281).

[9] Die Vorstellung eines privaten „Beweises" ist mit der Vorstellung eines privaten Plans vergleichbar, wie sie Wittgenstein in den *Philosophische Untersuchungen* beschreibt: „Ich sage Einem, ich sei einen gewissen Weg gegangen, einem Plan gemäss, den ich zuvor angefertigt habe. Ich zeige ihm darauf diesen Plan, und er besteht aus Strichen auf einem Papier; aber ich kann nicht erklären, inwiefern diese Striche der Plan meiner Wanderung sind, dem Andern keine Regel sagen, wie der Plan zu deuten ist. Wohl aber bin ich jener Zeichnung mit allen charakteristischen Anzeichen des Kartenlesens nachgegangen. Ich könnte so eine Zeichnung einen ‚privaten' Plan nennen" § 653, S. 269.

[10] Nicht nur bei Robinson, auch an vielen Stellen in Wittgensteins Nachlass finden sich Vergleiche zwischen Musik und Mathematik. In einer Notiz aus den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* zum Beispiel weist er auf die „*genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik und in der Mathematik" (III.63, S. 192) hin. Vgl. auch I.171, S. 100-101; III.77, S. 203; VI.2, S. 304; VII.11, S. 370; VII.24, S. 390; VII.40, S. 407.

minimale Anforderung das Moment der Mitteilbarkeit besitzt, da andernfalls das Abgleiten in eine Art mathematischen Solipsismus droht. Aus diesem Grund eignet sich der Gattungsbegriff der (mentalen) Konstruktion, von dem der Intuitionismus Gebrauch macht, nur bedingt. Michael Dummett, der eine eigene Spielart des Intuitionismus vertritt, hat dies immer wieder hervorgehoben:[11]

> Intuitionists usually say that written proofs are only the imperfect representations of the corresponding mental constructions: but, unless we are to acquiesce in a purely solipsistic interpretation of the whole conception, they must be communicable, and, if communicable, to be communicated by means of language; there is therefore no justification for holding that their linguistic representations may, in certain cases, necessarily be imperfect. The important point is not that the mental construction is, as it were, in a different medium from the written proof, but, rather, that the written proof is a proof in the required sense only in virtue of its being couched in an interpreted language: the features which make it genuinely a proof of its conclusion, and effectively recognizable as such, are neither identifiable with nor isomorphic to any of its purely formal characteristics as a complex structure of written signs, but belong to it solely in virtue of the meanings of those signs.

Indem wir hier einen breit gefassten Bildbegriff dem der Konstruktion vorziehen und Beweise als Bilder zu verstehen versuchen, orientieren wir uns allerdings nicht an Dummett, sondern an Wittgenstein, der in einer seiner *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* festhält:[12]

> Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind überzeugt, dass ein *so* geregeltes Vorgehen immer zu diesem Bild führt.

Wittgenstein weist in dieser und ähnlichen Bemerkungen zunächst darauf hin, dass ein Bild im gewöhnlichen Sinn des Worts, oder eine Reihe von solchen Bildern, auf uns wie ein Beweis wirken kann. Zur Veranschaulichung führt er Zeichnungen und einprägsame Figuren an, wie sie auch in didaktisch ausgerichteten Mathematikbüchern zu finden sind. Doch das ist nicht der Punkt. Kaum jemand

[11] Dummett (2000, S. 270). Vgl. auch Dummett (1973, S. 226).

[12] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.22, S. 159. Weitere Stellen, an denen Beweise als Bilder verstanden oder mit Bildern verglichen werden, sind I.25-41, S. 46-55; I.121-125, S. 84-86; I.138-141, S. 91-92; II.8-14, S. 127-129; II.42-46, S. 137-138; II.55-62, S. 140-142; III.1-2, S. 143; III.9-11, S. 149-151; III.21-25, S. 158-162; III.39-41, S. 170-172; IV.11-12, S. 229-230; IV.17-21, S. 233-235; IV.31-33, S. 239-242; IV.49, S. 249-250; V.10-11, S. 268-269; V.45, S. 297-298; V.51, S. 301; VI.2-5, S. 303-307; VII.9-10, S. 365-368; VII.70-72, S. 432-435.

würde bestreiten wollen, dass es geometrische Beweise gibt, oder dass bildliche Darstellungen helfen können, mathematische Aussagen zu verstehen und sich von ihrer Wahrheit zu überzeugen. Dass aber am Ausmass dieser Möglichkeit ein wesentlicher Aspekt mathematischer Beweise sichtbar wird, wodurch sie sich von anderen Begründungsweisen unterscheiden, dem Grad nach insbesondere von formalsprachlichen Ableitungen, wird oft übersehen, und am häufigsten von denen, die mit Grundlegungsabsichten auf die Mathematik blicken. Diese Feststellungen sind mit Dummetts Mitteilbarkeitsforderung nicht unverträglich, da der Gebrauch von bildlichen Darstellungen zu Beweiszwecken immer in eine umfassende Sprache eingebettet sein muss. Unsere Begriffswahl hat also neben der Abwendung der solipsistischen Gefahr den weiteren Vorteil, dass sich einfacher erklären lässt, wie neben Texten auch Bilder und Diagramme einen wesentlichen Beitrag an die Beweiskraft von Beweisen leisten können.[13]

Wittgensteins Kritik reicht indes tiefer. Ihr zufolge verhält es sich nicht nur so, dass Bilder mitunter als Beweise dienen können, sondern jeder Beweis, selbst der am wenigsten anschauliche, ist – insofern er die Kraft besitzt, etwas zu beweisen und uns zu überzeugen – gewissermassen ein Bild:[14]

> Der Beweis muss ein anschaulicher Vorgang sein.[15] [...] Ich möchte sagen, dass, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, [...] der *Beweis* zerstört ist. Und nicht in einer dummen und unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat. [...] Das heisst: Der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur so lange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. [...] Wir neigen zu dem Glauben, dass der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft hat, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- und Schlussgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlussgesetze ist. Die logische Gewissheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewissheit.

Mathematisch zu überzeugen und Gewissheit zu verschaffen, vermag ein Beweis demnach nur kraft bestimmter Eigenschaften, die ihn als eine Art Bild ausweisen. Jeder Beweis – sei er nun besonders anschaulich und mit Figuren dargestellt

[13] Für eine systematische Untersuchung der bildlichen Aspekte symbolischer Notationen sowie der möglichen Rolle von Diagrammen und anderen Darstellungen in mathematischen Beweisen, vgl. Giaquinto (2007). Zwei Fallstudien bieten De Toffoli und Giardino (2014) und De Toffoli (2017). Weitere Beiträge sind in Giardino et al. (2022) enthalten.

[14] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.42-43, S. 173-175.

[15] Wir lesen hier mit der vorhin zitierten Bemerkung (III.22, S. 159): Der Beweis muss die *anschauliche Darstellung* eines Vorgangs sein.

oder rein sprachlich und ohne spezielle Notation – besitzt diese Eigenschaften, die Wittgenstein hier als geometrische bezeichnet. Dazu gehört insbesondere die Übersehbarkeit, mithin, dass sich beim Erfassen des Beweisbilds die Einsicht aufzwingt, es *müsse* sich so verhalten, wie dargestellt.[16] „Die Russellschen Zeichen" hingegen (d. s. logische Ableitungen in der Notation der *Principia Mathematica*) „hüllen die wichtigen Formen des Beweises gleichsam bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in viele Tücher gewickelt ist".[17] So betrachtet nehmen sich die Grundlegungsbemühungen des Logizismus geradezu verkehrt aus. Denn die Beweise, denen man in der mathematischen Praxis begegnet, stehen den lückenlosen und durchformalisierten Ableitungen der Logik hinsichtlich ihrer Beweiskraft in keiner Weise nach – im Gegenteil, mangelt es jenen in der Regel doch an Übersichtlichkeit (worauf wir weiter unten sowie im dritten Abschnitt zurückkommen werden).

Mit dem Aufkommen computergestützter Beweise hat sich inzwischen ein neues Formalisierungsstreben eingestellt, das von Vorstellungen begleitet wird, gegen die Wittgensteins Kritik ein heilsames Gegenmittel bietet, wenn man sich auf sie einlässt. Obwohl das axiomatische Denken und die verschiedenen Bemühungen um eine Grundlegung der Mathematik im letzten Jahrhundert die Art und Weise, wie die Disziplin praktiziert wird, beeinflusst haben, trennt nach wie vor ein weiter Graben die meisten Forschungsgebiete vom vermeintlichen Ideal formalisierter Beweisführung. Um diesen Graben wenigstens philosophisch zu überbrücken, wird mitunter vorgeschlagen, den lebendig aus der Praxis genommenen Beweis als eine grobe Skizze aufzufassen, die eine ihm entsprechende, jedoch vollständige formale Ableitung andeutet.[18] Dies ermöglicht es, in Anlehnung an die Definitionen formaler Gültigkeit aus der Logik einen Begriff zu definieren, mit dem sich scheinbar auch in mathematischen Kontexten scharf entscheiden lässt, was als ein strenger Beweis gilt, was nicht, und ebenso wann derselbe, wann zwei verschiedene Beweise vorliegen. Um festzustellen, ob zum Beispiel in verschiedenen Algebra-Lehrbüchern Varianten ein und desselben Beweises abgedruckt sind, müsste demnach durch Formalisieren geprüft werden, ob sie dieselbe Ableitung andeuten oder nicht. Doch angesichts der vielfachen Umformungen und Anpassungen, die das Formalisieren mathematischer Sätze und ihrer Beweise bekanntlich erfordert, erscheint die Annahme, dass diese Beziehung des Andeutens rechtseindeutig ausfallen müsse, über-

[16] Vgl. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.39, S. 170.

[17] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.25, S. 162

[18] Tatsächlich finden sich in der gegenwärtigen Literatur verschiedene Varianten dieses Standpunkts, die in Tanswell (2015, S. 296) unter der Bezeichnung ‚derivationist approach' versammelt werden. Eine einflussreiche Formulierung bietet Azzouni (2004), wobei hier die Auffassung nicht-formaler Beweise als Skizzen abgelehnt wird, vgl. S. 87-89. Avigad (2021, S. 7381) und Hamami (2022, S. 410) hingegen scheinen diese Auffassung zu akzeptieren.

aus zweifelhaft.[19] Auch will es nicht zur Heterogenität der Zählweisen und Identitätskriterien passen, die zur Anwendung kommen, wenn über mathematische Beweise gesprochen wird, etwa wenn es in einem mathematischen Lehrbuch oder einer historischen Darstellung der Zahlentheorie heisst, Landaus Beweis von Bertrands Vermutung sei im Wesentlichen identisch mit Tschebyschows ursprünglichem Beweis, wohingegen die Beweise des Primzahlsatzes von Erdős und Selberg trotz aller Übereinstimmung als zwei verschiedene gezählt werden. Der hier bevorzugte Bildbegriff lässt denn auch weitgehend offen, wie stark von den Einzelheiten des schriftlichen oder diagrammatischen Beweisens jeweils abstrahiert werden muss, um das Beweisbild zu fassen.[20]

Auf breitere Zustimmung als der Vorschlag des eindeutigen Andeutens stösst denn auch eine vorsichtigere Annahme, die zwar nicht mehr ohne Weiteres für Individuierungszwecke verwendet werden kann, aber dennoch eine Art Kriterium, oder wenigstens eine notwendige und hinreichende Bedingung, für die Korrektheit und Strenge mathematischer Beweise liefern soll. Nach dieser „standard view“ ist ein nicht-formaler Beweisversuch genau dann ein Beweis, mithin streng korrekt, wenn er in (mindestens) eine formal gültige Ableitung übersetzt werden kann.[21] Die Korrektheit mathematischer Beweise wäre demnach durch eine rein formale Gültigkeit verbürgt, die in Bezug auf ein gegebenes System von Grund- und Schlussgesetzen definiert ist. Dass hier jedoch ein Kriterium vorliegt, welches nicht bloss eine externe Eigenschaft mathematischer Beweise einfängt, sondern Aufschluss über ihr Wesen gibt, ist zweifelhaft.[22]

Einen ersten kritischen Hinweis gibt uns Dummett, wenn er im zweiten Teil der oben zitierten Passage bemerkt, dass der mathematische Beweis in der Regel nicht, oder zumindest nicht allein, aufgrund seiner formalen Beschaffenheit als solcher erkannt werden kann, sondern ein Verständnis der *Bedeutung* der in ihm vorkommenden Zeichen bedingt. Dieses Verständnis, meint Dummett weiter, setze die volle Beherrschung der Sprache voraus, worin der Beweis ausgedrückt ist: „We therefore have no reason to expect that any proof of some given statement will

[19] Für eine kritische Diskussion der Behauptung, wonach Beweise Ableitungen eindeutig anzeigen, vgl. Tanswell (2015, S. 301-307). Auch in Leitgeb (2009) wird darauf hingewiesen, wie kompliziert sich das Verhältnis zwischen formaler und nicht-formaler Beweisbarkeit gestaltet; dass überhaupt eine Beziehung besteht, die für eine begriffliche Klärung nicht-formaler Beweisbarkeit von Interesse sein könnte, müsse sich erst zeigen.

[20] Für eine kompakte Besprechung unterschiedlicher Identitätskriterien für Beweise, vgl. Dawson (2006, S. 272-275).

[21] Verschiedentlich formuliert und verteidigt wird diese Standardauffassung u. a. in Avigad (2021), Hamami (2022) und Tatton-Brown (2023).

[22] Einige der Einwände, die im Folgenden angeführt werden, wurden schon in Rav (2007), in Leitgeb (2009) und in Antonutti Marfori (2010) vorgebracht. Repliken darauf finden sich in Hamami (2022, S. 435-441).

be recognizable as such by any means that falls short of demanding a full understanding of the language in which the proof is expressed".[23] Anders verhält es sich bei formalen Ableitungen, da in entscheidbaren Kalkülen ein rein mechanisches Verfahren existiert, mit dem sich entscheiden lässt, ob eine gegebene Formel tautologisch ist oder nicht. Und selbst in halb-entscheidbaren Kalkülen wie der Prädikatenlogik erster Stufe stehen noch Verfahren zur Erkennung von Tautologien und Kontradiktionen zur Verfügung. Für die Prüfung eines nicht-formalen Arguments können jene Algorithmen freilich erst dann angewendet werden, wenn dieses in ein formales übertragen wurde. Da die Übersetzungsleistung wiederum ein „volles Verständnis" der Sprache voraussetzt, in der das nicht-formale Argument verfasst ist, bleibt Dummetts Einwand bestehen: Es gibt keinen Grund zur Annahme, wonach mathematische Beweise als solche erkannt werden können, ohne dass die Bedeutungen der in ihnen vorkommenden Zeichen verstanden werden müssten.[24]

Wer nun aber die mathematischen Begriffe versteht, die in einem Beweis vorkommen, ebenso die angeführten Prämissen und die Konklusion, und ausserdem die logische Struktur des Arguments übersieht, verfügt bereits über alles Nötige, um den Beweis selbst zu erfassen, mithin sich von ihm überzeugen zu lassen und als wahr anzuerkennen, was er beweist. Dafür braucht es keinen Umweg über die Gültigkeit einer formalen Ableitung, im Gegenteil, das wäre dem Verständnis zunächst hinderlich. Euklids uralter Beweis, dass keine endliche Menge natürlicher Zahlen alle Primzahlen enthalten kann, es also endlos viele davon geben muss, verfügt bereits über alle Eigenschaften, die einen strengen Beweis ausmachen und seiner Konklusion die nicht weiter steigerbare Gewissheit eines mathematischen Theorems verleihen. Dass es gewiss Wege gibt, ihn in ein formales System zu übertragen, und dass sich das Ergebnis dieser Übertragung als gültige Ableitung in diesem System erweisen würde, tut nichts zur Sache. Der ursprüngliche Beweis sorgt schon für sich selbst. Das Kriterium für sein Beweissein an die Existenz einer Eigenschaft zu binden, die ihn nur am Rande berührt, ist nicht dazu geeignet, ihn als Wesen *sui generis* zu begreifen. Es ist so, wie wenn man die hinreichende Steifigkeit einer Holzbrücke nicht an Eigenschaften, die an ihr selbst vorkommen, festmachte, sondern an denen einer ihr nachgebildeten Betonbrücke.

Dass sich zwischen mathematischen Theorien und logischen Formalismen ein Zu-

[23] Dummett (2000, S. 270).

[24] Zwar mag es sein, dass die Übersetzung nicht-formaler Beweise in formale Ableitungen routinemässig, d. h. durch die Anwendung entsprechender Algorithmen, erfolgen kann, wie in Hamami (2022, S. 428-433) ausführlich dargelegt wird. Doch sowohl die Entwicklung wie die fallgerechte Anwendung solcher Übersetzungsalgorithmen setzen wiederum das volle Verständnis der Ausgangssprache und damit Kenntnis der Bedeutung der darin vorkommenden Begriffe voraus.

sammenhang herstellen lässt, der es wert ist, untersucht zu werden, und der auch etwas über die Mathematik anzeigt, soll hier keinesfalls bestritten werden. Gleichwohl zielt das Kriterium, das die Standardauffassung liefert, an dem, was mathematische Beweise ihrem Wesen nach ausmacht, vorbei. Diesem Befund entspricht auch die Wirklichkeit der Praxis. Bis jetzt ist es den Mathematik Praktizierenden jedenfalls noch gut gelungen, sich der Korrektheit eines Beweisversuchs zu überzeugen, ohne Formalisierungen und Beweisassistenten zu Hilfe zu nehmen.[25] Nun ist nicht ausgeschlossen, dass neue Normen in der Zukunft die Praxis verschieben, sodass jenes Beweisideal, das sich an formalen Ableitungen orientiert und angeblich bereits heute den Standard[26] setzt, in eine Anforderung verwandelt würde. Ohne gezielte Gegenmassnahmen hätte eine solche Verschiebung indes den Verlust anderer epistemischer Ideale zur Folge, die für das Beweisen mindestens ebenso wichtig sind. Formale Ableitungen sind generell unübersichtlicher und weniger leicht verständlich als ihre nicht-formalen Verwandten. Da jede noch so triviale Annahme, jede noch so gängige Definition als separater Schritt in die Beweisführung aufgenommen werden muss und nur die vorgegebenen Schlussregeln zur Anwendung kommen dürfen, können formale Ableitungen von Sätzen, für die sich in Lehrbüchern kurze und prägnante Beweise finden, zehntausende Zeilen oder mehr umfassen.[27] Besonders wenn Menschen bei der Überprüfung solcher Ableitungen im Spiel sind, ist die Fehleranfälligkeit deutlich erhöht, was wiederum die Gewissheit der erreichten Konklusion infrage stellt. Doch nicht nur deshalb tangiert das Fehlen von Übersichtlichkeit die Gewissheit des Satzes, dessen Wahrheit es zu beweisen gilt. Es wird dadurch auch die begründende oder erklärende Funktion, die gute Beweise auszeichnet, zerstört (worauf wir im dritten Abschnitt zurückkommen werden). Denn worüber man sich keine Übersicht zu verschaffen vermag, wird man kein Verständnis und damit auch keine Gewissheit erlangen.

Beweise, wie sie in der mathematischen Praxis vorzufinden sind, enthalten denn auch nur in Ausnahmefällen schrittweise Ableitungen nach gegebenen Schlussregeln aus einer eindeutig festgelegten Menge von Axiomen. Die meisten Schlüsse, die darin zur Anwendung kommen, sind aus formallogischer Sicht mangelhaft,

[25] Dass die Standardauffassung es weitgehend versäumt, zu erklären, wie die strenge Korrektheit von Beweisen in der Praxis beurteilt wird und die für gewöhnlich hohe Übereinstimmung der Urteile zustande kommt, wird in Hamami (2022, S. 445) eingeräumt.

[26] Vgl. Avigad (2021, S. 7378) und Hamami (2022, S. 410). Wenn ein solches Beweisideal am Werk ist, dann betrifft es die zu erreichende Gewissheit, nicht primär die Art des Beweises. Formale Ableitungen erscheinen einigen deshalb als ideale Beweise, weil davon ausgegangen wird, dass sie eine absolute Beweiskraft besitzen und damit die höchsten Gewissheitsansprüche erfüllen.

[27] Zum Beispiel umfasst der erste mit einem Beweisassistenten überprüfte formale Beweis des Primzahlsatzes rund 30'000 Zeilen (oder 673 Seiten Skript). Atle Selberg dagegen reichten für seinen Beweis, nach dem sich die formale Ableitung richtet, weniger als 10 A4-Seiten. Für die beiden Beweise, vgl. Avigad, Donnelly et al. (2007, S. 8) und Selberg (1949). Zur Diskrepanz von Umfang und Aufwand, vgl. Avigad und Harrison (2014, S. 75).

da entweder enthymemisch, nur material gültig oder beides zugleich. Nach dem Kriterium aber, das die Korrektheit von Beweisen an formale Gültigkeit knüpft, dürften Enthymeme und nur material gültige Schlüsse – da die Gültigkeit der letzteren auch an der Bedeutung der darin vorkommenden Zeichen hängt – nicht in mathematischen Beweisen vorkommen, es sei denn, sie lassen sich im Rahmen eines anerkannten Axiomen- und Logiksystems zu formal gültigen Schlüssen vervollständigen. Dass dies immer möglich sein soll, ohne dass auf fragwürdige Axiome zurückgegriffen werden muss oder sich *ad hoc* Anpassungen am System aufzwingen, ist eine weitreichende Behauptung, die eine entsprechend robuste Begründung erfordert.[28]

Insbesondere müsste geklärt werden, welches System beim Beweisen in der Mathematik tatsächlich zur Anwendung bzw. dieser Anwendung am nächsten kommt. Bekanntlich herrscht in dieser Frage wenig Einigkeit, wie die Vielzahl ungleichwertiger Vorschläge, die seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert vorgebracht wurden, bezeugt: Liefert die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom die geeignetste Grundlage, wie nicht wenige glauben, oder müsste Russells Typentheorie (bzw. die durch Ramsey vereinfachte Version derselben) wenigstens in Betracht gezogen werden? Braucht es überhaupt eine Prädikatenlogik zweiter Stufe oder muss, wie Quine meinte, die erste Stufe ausreichen?[29] Haben nur die intuitionistischen Gesetze Geltung oder die Gesamtheit der klassischen? Braucht es parakonsistente Logiken, um die Antinomien in den Griff zu bekommen, oder kann an *ex falso quodlibet* festgehalten werden? Steht womöglich ein Kalkül des natürlichen Schliessens dem mathematischen Denken am nächsten oder trotz allem ein axiomatischer? Usw. usf.

Als zu Beginn dieses Abschnitts das Beweisen als *regelgeleitetes* Voranschreiten charakterisiert wurde, sollte dies nicht implizieren, dass die Übersetzbarkeit in eine formal gültige Ableitung eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines mathematischen Beweises darstellt. Beabsichtigt war lediglich eine schwächere Forderung: dass Beweisversuche nur dann gelingen können, mithin korrekt sind, wenn sie nicht gegen anerkannte Regeln verstossen. Beim Beweisen müssen allerdings nicht nur logische Gesetze befolgt werden, sondern auch solche, die sich aus einer etablierten Technik ergeben, Rechenregeln zum Beispiel. Offenbar aber

[28] Für einen solchen Begründungsversuch, vgl. Hamami (2022, S. 433-434).

[29] Einem Beweis aus der zahlentheoretischen Praxis zum Beispiel, der von der vollständigen Induktion Gebrauch macht, lässt sich schlicht nicht entnehmen, ob er erststufig mit Hilfe des Induktionsschemas oder doch als Instanz des zweitstufigen Induktionsaxioms formalisiert werden soll, wie in Leitgeb (2009, S. 269) zu Recht bemerkt wird. Die logische Ordnung des formalen Systems, in das hinein formalisiert wird, sei durch das zu rekonstruierende Mathematikfragment unterbestimmt. Vgl. dazu das pragmatische Ausweichmanöver in Avigad (2021, S. 7378).

bleibt die Menge *dieser* Regeln weder über die Zeit noch über Gebietsgrenzen hinaus unverändert. Während die Entwicklung neuer Methoden das Regelrepertoire erweitert, können tradierte Techniken an Bedeutung verlieren, bis sie ganz aus dem Werkzeugkasten verschwunden sind; und auch zwischen den Gebieten, ja sogar zwischen verschiedenen Theorien aus demselben oder verwandten Gebieten lassen sich erhebliche Unterschiede ausmachen.[30] Die Menge der Regeln, die beim Beweisen angewandt werden dürfen oder beachtet werden müssen, ein für allemal und für die Mathematik insgesamt festsetzen zu wollen, wäre ein von Grund auf fehlgeleitetes Unterfangen. Vielmehr trifft zu, was Wittgenstein in einer anderen Bemerkung auf den Punkt bringt:[31]

> *Das* ist wahr daran, dass Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung. [...] Aber wie –, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*? – Sie schafft immer neue und neue Regeln: baut immer neue Strassen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

## 2 Wie hängen in der Mathematik Beweis und Wahrheit zusammen?

*Der mathematische Beweis zeigt, dass die Aussage, die er beweist, wahr sein muss. Jeder Versuch, eine Falschheit zu beweisen, ist daher zum Scheitern verurteilt. Beweisen lassen sich allein Wahrheiten. Führt der Beweisgang in eine offensichtliche Falschheit, insbesondere in eine Aussage der Form $\varphi \wedge \neg\varphi$, liegt damit kein Beweis für diese Aussage vor, sondern für die Negation der Annahme, von der das Beweisen ausging. Auch mit einer reductio ad absurdum kann nur Wahres bewiesen werden, wenn es gleich auf indirektem Weg geschieht. Bewiesene Aussagen können also unmöglich falsch sein. Hingegen ist es möglich zu beweisen, dass eine Aussage falsch ist, unter anderem über einen indirekten Beweis ihrer Negation. Die Aussage selbst ist dann nicht bewiesen, sondern widerlegt.*

Dass ein bewiesener Satz nicht falsch sein kann, mag auf den ersten Blick als Begriffswahrheit der langweiligeren Art erscheinen. Dennoch fragt sich, welche begrifflichen Fäden sie zusammenhalten und ob vielleicht nicht doch ein Beweisbegriff

[30] Für Beispiele topik-spezifischer Schritte in Beweisen, vgl. Rav (1999, S. 21-27). Für weiterführende Betrachtungen über die Spannung zwischen Zwang und Freiheit, die das mathematische Beweisen beherrscht, vgl. Nickel (2010) und Nickel (2019).

[31] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.165–166, S. 99.

denkbar wäre, durch den nicht ausgeschlossen wird, dass es für gewisse Falschheiten Beweise gibt.

Einen Weg zeichnet der Dialetheismus, demnach es wahre Aussagen gibt, deren Negation ebenfalls wahr ist.[32] Unter der Annahme, dass eine Aussage genau dann falsch ist, wenn ihre Negation wahr ist, wäre eine solche dialetheische Aussage sowohl wahr als auch falsch. Die Negation einer dialetheischen Aussage wäre ebenfalls sowohl wahr als auch falsch, wenn wie in der klassischen Aussagenlogik doppelte Negationen verschwinden. Für die intuitionistische Aussagenlogik gilt dies nicht, da dort das Schema $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ nicht tautologisch ist.[33]

Nehmen wir also an, $\psi$ sei ein bewiesener Satz aus irgendeinem mathematischen Teilgebiet, mithin wahr nach unseren Bestimmungen. Nehmen wir ausserdem an, was der Dialetheismus erlaubt: dass $\neg\psi$ ebenfalls wahr ist. Dann liegt (unter der Annahme, dass die Falschheit eines Satzes mit der Wahrheit seiner Negation zusammenfällt) ein Beweis für einen Satz vor, der auch falsch ist. Wenn seine Negation, die ja wahr ist, nun ebenfalls bewiesen ist, dann liegt sogar ein Beweis für die Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ vor. Um zu verhindern, dass sich daraus die Beweisbarkeit aller möglichen Behauptungen ergibt, kann der Beweisbegriff an eine parakonsistente Logik geknüpft werden, sodass die Schlussweise des *ex falso quodlibet* nicht gilt. Und tatsächlich scheint dies ein gangbarer Weg, auf dem ein sinnvoller Beweisbegriff gebildet werden kann, nach dem es nicht ausgeschlossen ist, Falschheiten zu beweisen.[34]

[32] Für eine neuere Sammlung philosophischer Beiträge zum Dialetheismus, vgl. Priest, Beall et al. (2004).

[33] Nach den Gesetzen der klassischen Aussagenlogik gilt für beliebige Theorien $\Phi$, dass eine Formel $\varphi$ genau dann in $\Phi$ beweisbar ist ($\Phi \vdash \varphi$), wenn auch $\neg\neg\varphi$ in $\Phi$ beweisbar ist ($\Phi \vdash \neg\neg\varphi$). Nach den Gesetzen der intuitionistischen Logik dagegen gilt dieser Zusammenhang in die eine Richtung – wenn $\Phi \vdash \varphi$, dann $\Phi \vdash \neg\neg\varphi$ –, umgekehrt jedoch nicht. Unter der BHK-Interpretation (‚BHK' steht für Brouwer, Heyting, Kolmogorow) des intuitionistischen Systems wird dieser Unterschied wie folgt verständlich. Ich folge hier der Darstellung in Dalen (2004, S. 154-155): Angenommen, es gelte $\varphi$, d. h. es liege ein Beweis $a$ für $\varphi$ vor. Nehmen wir ausserdem hypothetisch an, dass ein Beweis $b$ für $\neg\varphi$ vorliege. Dann können wir $a$ und $b$ so zusammensetzen, dass sich aus ihrer Zusammensetzung ein Widerspruch (nämlich $\varphi \wedge \neg\varphi$) ergibt. Mit Hilfe von $a$ lässt sich also jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in den „Beweis" eines Widerspruchs, in eine *reductio ad absurdum* verwandeln. Das heisst aber (gemäss BHK-Interpretation) nichts anderes, als dass die Negation von $\neg\varphi$ gilt, mithin ein Beweis für $\neg\neg\varphi$ vorliegt. Gehen wir umgekehrt von der Annahme aus, dass ein Beweis $c$ für $\neg\neg\varphi$ vorliegt, gelangen wir nicht zur Folgerung, dass auch ein Beweis für $\varphi$ vorliegt. Denn: Über den Beweis $c$ wissen wir (gemäss BHK-Interpretation), dass sich mit ihm jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in einen Widerspruch führen lässt. Wir wissen also, dass es keinen Beweis für $\neg\varphi$ geben kann. Da ein Beweis für $\neg\varphi$ eine Konstruktion wäre, die einen Beweis für $\varphi$ in einen Widerspruch führte, können wir aus dem Vorliegen eines Beweises für $\neg\neg\varphi$ lediglich folgern, dass es keine Konstruktion geben kann, die einen Beweis für $\varphi$ in einen Widerspruch führt. Damit aber liegt uns noch kein Beweis für $\varphi$ vor. Kurzum: Wenn ein Beweis für $\varphi$ vorliegt, dann auch einer für $\neg\neg\varphi$; wenn einer für $\neg\neg\varphi$, dann nicht zwingend auch für $\varphi$.

[34] Ein Standardwerk über parakonsistente Logik ist Priest, Routley et al. (1989), eines über in-

Obwohl die Beweisbarkeit falscher Sätze zugestanden wird, kann in dem eben skizzierten Fall die Wahrheit eines Satzes notwendige Bedingung seines Bewiesenseins bleiben. Denn selbst von der Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ würde man am ehesten annehmen, dass ihr sowohl Wahrheit als auch Falschheit zukommt, da $\psi$ dialetheisch ist.[35] Anders stellt sich die Sachlage dar, wenn die Möglichkeit einer Aussage $\chi$ zugestanden wird, für die zwar ein Beweis vorliegt, die aber nicht wahr, sondern *nur* falsch ist (oder weder wahr noch falsch). In diesem zweiten Fall lässt sich die Verknüpfung von Wahrheit und Beweisbarkeit nicht aufrecht erhalten. Dass ein Satz wahr ist, wäre nicht mehr zuverlässig am Vorliegen eines Beweises erkennbar.

Durch unsere Bestimmungen, wonach nur Wahrheiten und keine Falschheiten bewiesen werden können, sind freilich beide Fälle ausgeschlossen, d. h. wir werden sie in dem, was folgt, nicht berücksichtigen. Im ersten Fall, der die Beweisbarkeit dialetheischer Aussagen vorsieht, geschieht dies lediglich der Einfachheit halber. Der zweite Fall dagegen wird deshalb ausgeschlossen, weil in ihm der enge begriffliche Zusammenhang zwischen mathematischer Wahrheit und Beweis aufgehoben ist. Wie das Beweisen da noch dem Sicherstellen dienen könnte, ist nicht zu sehen. Vielmehr fragt sich, ob in diesem Fall überhaupt festzustellen wäre, dass ein Satz wahr, eine Aussage falsch ist.

Als es zu Beginn dieses Abschnitts hiess, der Beweis zeige, dass der Satz, den er beweist, wahr sein muss, blieb offen, worin die Wahrheit des mathematischen Satzes besteht. Dies geschah nicht nur deshalb, weil man sich beim Versuch, diese Aporie zu beantworten, besonders leicht in Widersprüche verstrickt, sondern auch und vor allem, weil sich viele durch sie sogleich dazu veranlasst sehen, Annahmen über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände zu treffen. Die folgenden Betrachtungen bleiben jedoch auf das Beweisen ausgerichtet, ohne einen bestimmten metaphysischen Standpunkt einzunehmen oder *a priori* auszuschliessen.

Wer eine realistische Auffassung – einen mathematischen Platonismus – vertritt, wäre geneigt, die sicherstellende Funktion des Beweisens dahingehend zu beschreiben, dass an dem zu beweisenden Satz eine Eigenschaft nachgewiesen wird, die dieser losgelöst von jedem Beweis und allen Bedingungen der Möglichkeit menschlicher Erkenntnis ein für allemal besitzt: allein aufgrund seiner Übereinstimmung mit einer idealen Wirklichkeit mathematischer Gegenstände und Strukturen, die uns in Teilen, aber womöglich nicht vollständig zugänglich ist. Das entspricht zwar

konsistente Mathematik Mortensen (1995). Für eine Diskussion des Gebrauchs parakonsistenter Logiken im Umgang mit Antinomien, insbesondere mit der Antinomie des Lügners, vgl. Brendel (1992, Kap. 11).

[35] Vgl. indes Sainsbury (2004).

nicht der Beschreibung, die weiter unten (im vierten Abschnitt) von der sicherstellenden Funktion des Beweisens gegeben wird, wäre aber mit ihr nicht unverträglich. Und wenn wir für den Moment von der schwierigen Frage der Wahrheit von Axiomen absehen (auf die wir im nächsten Abschnitt kurz zurückkommen werden), gilt selbst für naive Platonisten, dass, wer die Wahrheit einer umstrittenen Aussage zeigen möchte, einen Beweis zu geben hat, und, wer die Wahrheit einer angeblich bewiesenen Aussage bezweifelt, bestreiten muss, dass ein Beweis vorliegt. Wo sie nicht offensichtlich (evident) ist, erkennen wir die Wahrheit mathematischer Sätze an ihrem Beweis; und wo kein Beweis vorliegt, darf ihre Wahrheit nicht behauptet, höchstens vermutet werden, ausser sie ist offensichtlich. (Um die Wahrheit von Sätzen zu erkennen, die keines Beweises bedürfen, weil ihre Wahrheit offensichtlich ist, reicht es mitunter die involvierten Definitionen zu verstehen oder eine Technik, etwa eine Rechenregel, zu erlernen, sodass die Korrektheit des Satzes überprüft werden kann.)

Wenn wir demnach von den Axiomen und den offensichtlichen Wahrheiten absehen, ist der Beweis das untrügliche Kennzeichen mathematischer Wahrheit. Müsste also die Antwort auf die offengelassene Aporie nicht einfach lauten, dass eine Aussage mathematischen Inhalts genau dann wahr ist, wenn ein Beweis für sie tatsächlich vorliegt? So jedenfalls sehen es die Intuitionisten. Dummett begründet dies in seiner philosophischen Apologie des Intuitionismus unter anderem mit bedeutungstheoretischen Überlegungen:[36]

> What we actually learn to do, when we learn some part of the language of mathematics, is to recognise, for each statement, what counts as

[36] Dummett (1973, S. 225). Dummetts Argument ist weitaus länger und komplexer, als dass es hier angemessen wiedergegeben werden könnte. Zu seinen Prämissen gehört unter anderem das Prinzip, wonach die Bedeutung einer Aussage durch ihren Gebrauch vollständig bestimmt sei, dass es also keinen versteckten Bedeutungsgehalt geben kann, der im Gebrauch nicht manifestierbar, mithin nicht mitteilbar wäre. Vgl. dazu Dummett (1973, S. 223-225).
In demselben Aufsatz skizziert Dummett ausserdem eine zweite Argumentationslinie für den Intuitionismus in der Mathematik (ab S. 226). Diese fällt gegenüber den bedeutungstheoretischen Betrachtungen, die sehr allgemein gehalten sind, insofern spezifischer aus, als sie den genuin mathematischen Charakter mathematischer Aussagen berücksichtigt. Ausgangspunkt dieser Argumentation ist die anti-realistische These, wonach sich mathematische Aussagen nicht auf eine objektive, unabhängig von uns existierende Wirklichkeit beziehen, sondern auf „creations of the human mind“, auf „objects of thought“ (S. 227-228). Letztlich aber führe diese Argumentation, wie Dummett zu zeigen versucht, in einen resoluten und, wie ich meine, nicht gerade ansprechenden Skeptizismus: „it must deny that there exists any proposition which is now true about what the result of a computation which has not yet been performed would be if it were to be performed“ (S. 247). Nicht nur deshalb erscheint mir die bedeutungstheoretische Argumentationslinie vielversprechender. Zu Recht rekonstruiert sie den *eigentlichen* Streitpunkt zwischen Platonismus und Intuitionismus als einen semantischen, betreffend die Wahrheitsbedingungen mathematischer Aussagen. So gesehen, erweist sich der metaphysische Dissens lediglich als ein Symptom der semantischen Differenz. Vgl. dazu Dummett (1963, S. 153-154) und Dummett (1978, S. xxvi-xxix).

> establishing that statement as true or as false. In the case of very simple statements, we learn some computation procedure which decides their truth or falsity: for more complex statements, we learn to recognise what is to be counted as a proof or a disproof of them. That is the practice of which we acquire a mastery: and it is in the mastery of that practice that our grasp of the meanings of the statements must consist. We must, therefore, replace the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning for mathematical statements, by the notion of *proof*: a grasp of the meaning of a statement consists in a capacity to recognise a proof of it when one is presented to us [...].

Eine mathematische Aussage *verstehen*, ihre Bedeutung erfassen, heisst, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen können. Eine Wahrheit, für die es keinen nachvollziehbaren Beweis geben kann, wären wir ausserstande zu verstehen, geschweige denn als wahr zu erkennen. Sie hätte für uns keine Bedeutung, wäre kein Stück Mathematik. Und obwohl wir durchaus in der Lage sind, Aussagen zu verstehen, die weder bewiesen noch widerlegt wurden, ist es doch erst und allein das Vorliegen eines Beweises oder einer Widerlegung, das ein Urteil über Wahrheit oder Falschheit erlaubt. Die Wahrheit einer Aussage hängt an nichts anderem als an ihrem Beweis.

Von diesem intuitionistischen Standpunkt aus erweist sich unsere anfängliche Bestimmung, wonach der mathematische Beweis die Wahrheit eines Satzes zeige, freilich als Tautologie. Wenn die Wahrheit einer Aussage mathematischen Inhalts darin besteht, dass ein Beweis für sie vorliegt, dann zeigt demzufolge der Beweis eines Satzes, dass ein Beweis für ihn vorliegt – gewiss. Tautologizität und Zirkularität sind jedoch nicht immer das Symptom schlechter Definitionen. Hier drücken sie die Ersetzung des Wahrheitsbegriffs auf dem Gebiet der Mathematik durch den des Beweises aus, sodass die zu tragende Last vollumfänglich auf letzteren abgewälzt wird. Die philosophisch wichtige Frage ist dann, was Beweise – ihre Korrektheit und Vollständigkeit – ausmacht, was sie von gescheiterten Beweisversuchen unterscheidet.

Gegen die intuitionistische Auffassung mathematischer Wahrheit spricht indes, dass sich ihr zufolge von bekanntlich unbewiesenen Aussagen nicht sinnvoll sagen lässt, man halte sie für wahr oder man vermute, sie seien wahr. Wer Wahrheit als das Vorliegen eines Beweises auffasst, ist gezwungen, Vermutungen, von denen man weiss, dass sie noch nie bewiesen wurden, für *nicht* wahr zu befinden. Überhaupt scheint es aus Sicht des Intuitionismus kaum sinnvoll, in der Mathematik Vermutungen anzustellen, d. h. unbewiesene Aussagen für wahr zu halten oder zu sagen, sie seien wahrscheinlich wahr – ausser man wollte damit die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringen, dass irgendwo ein Beweis für sie vorliegt, den man nicht kennt. Gerade aber für die Praxis des Beweisens sind Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit noch unbewiesener Aussagen wichtig, ja vielmehr essenziell.[37] Sie geben dem Beweisbestreben eine Richtung vor und womöglich ein erreichbares Ziel. Als zum Beispiel Joseph Bertrand 1845 die Wahrheit der nach ihm benannten Vermutung postulierte, wonach zwischen jeder natürlichen Zahl und ihrem Zweifachen mindestens eine Primzahl liegt, tat er dies in der Annahme, dass ein Beweis für sie noch nie gelungen war, sich dies aber bald ändern könnte, zumal vieles, wenn auch noch nichts Zwingendes, für ihre Wahrheit sprach. Dadurch stellte er sie als ein lohnenswertes und wahrscheinlich erreichbares Beweisziel heraus. Historisch gesehen veranlasste dies tatsächlich ihren Beweis durch Pafnuti Tschebyschow und zeitigte darüber hinaus eine Reihe damit verwandter Ergebnisse.[38]

Dem Intuitionismus Zugeneigte könnten nun entgegenhalten, dass sich Vermutungen nicht auf die aktuale Wahrheit von Aussagen beziehen, sondern auf ihren zukünftigen Wahrheitswert. Wer eine Vermutung aufstellt, würde demnach nicht vermuten, dass eine bestimmte Aussage jetzt schon wahr ist, sondern ihr zusprechen, dass sie irgendwann wahr werden wird, sich mithin früher oder später ein Beweis finden lässt. Da Vermutungen aber nichts über den Zeitpunkt aussagen, an dem spätestens ein Beweis zu erwarten ist, müsste die betrachtete Zeitspanne grenzenlos sein, damit kein zufällig noch unverwirklichter Beweis unberücksichtigt bliebe. Bei der Eigenschaft, auf die sich Vermutungen gemäss dieser Auffassung beziehen, muss es sich folglich um eine modalisierte Variante dessen handeln, woran das intuitionistische Wahrheitskriterium geknüpft war. Vermutungen würden sich also nicht auf das zeitgebundene Vorliegen eines Beweises beziehen, sondern auf die Möglichkeit, eine Aussage zu beweisen: auf ihre Beweisbarkeit.[39]

Es fragt sich dann allerdings, ob diese modalisierte Eigenschaft dem Begriff der mathematischen Wahrheit ohnehin nicht besser entspricht als das ursprüngliche Wahrheitskriterium – d. i. das Vorliegen eines Beweises –, das dem Wirken historischer Kontingenz zu sehr unterworfen scheint. Müssten also Aussagen mathematischen Inhalts nicht vielmehr genau dann als wahr gelten, wenn sie bewiesen werden *können*, beweis*bar* sind? Nach diesem neuen Kriterium stellt es jedenfalls keinen

[37] Klassische Texte, in denen die Bedeutung des Vermutens für die mathematische Praxis behandelt wird, sind Pólya (1954/1968) und Lakatos (1976). Eine kurze, aber aufschlussreiche Erörterung findet sich in Tappenden (2008, S. 289-293).

[38] Vgl. dazu Narkiewicz (2000, S. 103-104, 115–118).

[39] Es ist bemerkenswert, dass Timothy Gowers in seiner kürzlich erschienenen Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsurteile, die mathematischen Vermutungen zugrunde liegen, u. a. zum Schluss kommt, dass sich ein solches Urteil nicht direkt auf die Wahrheit der betreffenden Aussage bezieht, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, dass für sie ein Beweis existiert, vgl. Gowers (2023, S. 109).

Widerspruch mehr dar, Aussagen für wahr zu halten, von denen man weiss, dass sie noch unbewiesen sind. Inkonsistent wäre es lediglich, an ihrer Wahrheit und zugleich an ihrer Unbeweisbarkeit festzuhalten. Dass mathematische Wahrheiten beweisbar sein müssen, wäre Ausdruck einer begrifflichen Regel, was jedoch angemessen erscheint. Denn nichts spricht dafür, durch die Wahl unserer Begriffe die Möglichkeit offenzulassen, dass uns manche mathematische Wahrheit für immer verborgen bleiben muss – ausser ein platonistisches Vorurteil über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände würde uns dazu zwingen.[40]

Manche behaupten, darunter auch Dummett, dass die Festlegung auf die Beweisbarkeit einer Aussage als das Kriterium für ihre Wahrheit letztlich immer in einem Platonismus mündet.[41] Das sehe ich anders, gestehe aber zu, dass es nicht leicht fällt, eine passende Modalität zu bestimmen. Obwohl hier der Raum für eine sorgfältige Erörterung dieses Problems nicht ausreicht, möchte ich, bevor wir zum nächsten Abschnitt übergehen, doch Hinweise geben.

Um nicht sogleich in eine Art Platonismus zu fallen, darf die Beweisbarkeit einer Aussage natürlich nicht mit der Existenz eines entsprechenden Beweises – im klassischen, extensionalen Sinn von ‚existieren' – gleichgestellt werden. Denn dadurch würden die Beweise selbst zu idealen Gegenständen, die nicht alle für uns zugänglich sein müssten. Andererseits kann, wie sich bereits zeigte, die Beweisbarkeit einer Aussage nicht darin bestehen, dass ein Beweis für sie bereits vorliegt oder spätestens zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft nachgereicht wird. Die Schwierigkeit liegt also darin, einen Mittelweg zwischen den Extremen zu finden.[42]

Sich aus begrifflichen Gründen dazu gezwungen sehen, einer Vermutung Wahrheit abzusprechen, nur um sie gleichsam im nächsten Augenblick, da ein Beweis

[40] Dass platonistische Positionen typischerweise die Möglichkeit von für uns unerkennbaren, mithin unbeweisbaren Wahrheiten offenlassen, ist ein Einwand, den Dummett vorbringt, vgl. Dummett (1973, S. 224-225). Was für diese Möglichkeit sorgt, ist gleichwohl nicht unmittelbar die metaphysische Auffassung über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände, sondern ein Realismus in Bezug auf Wahrheitswerte, d. i. die These, wonach mathematische Aussagen eine Bedeutung und einen objektiven Wahrheitswert besitzen, wenn sie nur wohlgeformt sind – unabhängig davon, ob wir diesen Wahrheitswert jemals erkennen können.

[41] Vgl. Dummett (1963, S. 164): „The identification of mathematical truth with intuitive provability is thus not a possible constructivist standpoint, if ‚intuitive provability' is understood as meaning the *existence* of an intuitively correct proof in a sense weaker than that of our being in possession of such a proof". In späteren Schriften scheint Dummett jedoch die Möglichkeit eines Mittelwegs einzuräumen, vgl. Dummett (2000, S. 12).

[42] Gegen die Möglichkeit eines solchen Mittelwegs könnte man eine Variante von Fitchs *Paradox of Knowability* ins Feld führen und zu zeigen versuchen, dass aus der Annahme, wonach jede wahre Aussage beweisbar ist (in Symbolen: $\forall\varphi(\varphi \rightarrow \diamond B\varphi)$), modallogisch folge, dass jede wahre Aussage bereits bewiesen wurde ($\forall\varphi(\varphi \rightarrow B\varphi)$)). Dummett und andere haben jedoch gezeigt, wie sich die paradoxe Konklusion intuitionistisch vermeiden lässt. Für eine Diskussion verschiedener Lösungsvorschläge, vgl. Murzi (2010).

für sie vorliegt, für wahr zu halten, mag verständlicherweise Unbehagen auslösen. Als Bertrand, um unser Beispiel wieder aufzunehmen, seine Vermutung äusserte, hatte sie sich in derart vielen Einzelfällen bereits bewahrheitet, dass alles für ihre Beweisbarkeit sprach. Wäre es nicht unangemessen, ihm vorzuwerfen, beim Postulieren ihrer Wahrheit eine Widersinnigkeit, einen begrifflichen Fehler begangen zu haben? Weitaus weniger problematisch ist es hingegen sich darauf festzulegen, dass eine mathematische Aussage zu einer Zeit, als die Theorie, der sie angehört, nicht einmal angedacht war, keine Bedeutung und damit auch keinen Wahrheitswert besass. Zu sagen, dass, bevor die Menschen zählen konnten, jene Aussage, die Bertrand viel später für wahr hielt, weder wahr noch falsch, sondern ganz und gar bedeutungslos war, erscheint der Sachlage durchaus angemessen.

Die Frage ist freilich, was es braucht – was für eine praktische und begriffliche Umgebung bereitstehen muss –, damit eine Aussage wie die von Bertrand über die Verteilung der Primzahlen Bedeutung erlangt, und ob damit sogleich auch ihr Wahrheitswert bestimmt ist. Hier scharfe Grenzen zu erwarten, wäre illusorisch und solche zu ziehen, kaum hilfreich. Dennoch könnte es sich, wie mir scheint, als lohnenswerte Aufgabe für die Philosophie der Mathematik erweisen, diese Fragen an einzelnen und zunächst einfacheren Beispielen aus der Geschichte zu untersuchen. Auf dem Gebiet der Arithmetik etwa wäre zu fragen, was die Voraussetzungen dafür sind, dass Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit von Gleichungen, die das Ergebnis einfacher Additionen zwischen natürlichen Zahlen ausdrücken ($a + b = c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$), ernsthaft aufgestellt werden können. Um den Wahrheitswert von solchen Gleichungen festzustellen, scheinen auf den ersten Blick das Beherrschen einer adäquaten Notation und das Addierenkönnen auszureichen. Einen elaborierteren Begriff von den natürlichen Zahlen, der auch ihre Unendlichkeit enthielte, braucht es nicht.

Mit zunehmenden arithmetischen Fähigkeiten und entsprechendem Ausbau einer operationalen Notation lassen sich jedoch sehr rasch Prädikate bilden und Aussagen über ihre Extension formulieren, bei denen es zweifelhaft wird, dass sie ohne eine enorme und nicht vorauszusehende Weiterentwicklung ihrer begrifflichen Umgebung einen bestimmten Wahrheitswert besitzen. Das Prädikat $a^n + b^n = c^n$ zum Beispiel ist auf so einfache Weise aus elementaren Operationen zusammengestellt, dass für ein initiales Verständnis der Aussage, es treffe für beliebige natürliche Zahlen $a, b, c$ ungleich 0 auf keine natürliche Zahl $n > 2$ zu, Kenntnisse aus der Schulzeit hinreichen. Aber wenngleich ein gewisses Verständnis für die Aussage – d. i. für den erst 1994 durch Andrew Wiles bewiesenen Grossen Fermatschen Satz – selbst Schulkindern zugestanden werden kann, überwiegt doch bei Weitem die kaum überbrückbare Distanz, welche die allermeisten unter uns von einem Nachvollzug eines Beweises, geschweige denn von dem Entwurf eines eigenen trennt.

Entsprechend wäre es zu einer Zeit, als das gesammelte arithmetische Wissen das heutige Schulwissen kaum überstieg, nicht sinnvoll, sondern lediglich ein glücklicher Treffer gewesen, die Wahrheit der Aussage zu vermuten. Die begriffliche Umgebung, um einen ernsthaften Beweisversuch zu wagen, der auch einen Fortschritt bedeutet und nicht sogleich in Ratlosigkeit geendet hätte, war schlichtweg nicht vorhanden. Ins Blaue hinein Vermutungen anzustellen, nur weil man über die syntaktischen Fähigkeiten dazu verfügt, entspricht nicht derjenigen Art des Vermutens, die sich in der Mathematik bewährt hat.

# 3 Wozu dienen Beweise in der Mathematik?

*Ob eine Aussage nun bewiesen oder widerlegt werden soll – Beweise dienen dem Überzeugen. Indem der Beweis die notwendige Wahrheit einer Aussage zeigt, erzwingt er ihre Anerkennung als ein Satz der Mathematik und die Ablehnung ihrer Negation. Wer sich oder andere davon überzeugen möchte, eine Aussage als mathematische Wahrheit anzuerkennen oder sie abzulehnen, gibt typischerweise einen entsprechenden Beweis.*

Der mathematische Beweis zeitigt auf eine ihm eigene Weise das Fürwahrhalten des Satzes, den er beweist. Anders als Befehle, Expertisen oder Offenbarungen kommt er ohne Autoritätsbezug aus. Auch muss man nicht, um das, was der Beweis zeigt, für wahr halten zu dürfen, darauf vertrauen, dass im Hintergrund fehlerfrei gearbeitet wurde, wie bei einem Rechner, der Zwischenschritte ausblendet und nur Ergebnisse anzeigt.[43] Ein Beweis muss in sich selbst all das offen und nachvollziehbar enthalten, was erforderlich ist, um in Subjekten mit hinreichendem Vorwissen und Können die gewünschte Wirkung zu erzielen. Wer ihn entworfen, wer ihn geprüft und für richtig befunden hat – all das ist für sein Wirken bloss zweitrangig. Der Beweis hat gewissermassen für sich selbst zu sorgen.

Selbstverständlich vermag kein Beweis losgelöst von allem andern für sich selbst zu sorgen. Nur innerhalb einer etablierten Praxis des Beweisens kann er seine Wirkung entfalten. Charakteristisch für die Wirkungsweise des mathematischen Beweises im Rahmen dieser Praxis ist, dass er überzeugt. Das Beweisbild ist, wie man sagen könnte, „ein Instrument des Überzeugens".[44] Es soll nicht einfach dazu

[43] Bei Wittgenstein findet sich eine ähnliche Abgrenzung des Beweisens vom Rechnen. Das Bild des Beweisens ändere sich gänzlich, sobald es als blosses Rechnen, d. h. als schrittweises Transformieren von Zeichenfolgen, aufgefasst wird: „Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)" *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.8, S. 365.

[44] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.72, S. 435.

bewegen, Sätze für wahr zu halten, sondern ihre notwendige Wahrheit überzeugend darlegen. Dafür müssen die Schritte, die das Bild zusammensetzen, einzeln – je für sich – nachvollziehbar sein. (Ausserdem müssen sie alle zulässig sein, d. h. sie dürfen keine unerlaubten Sprünge enthalten, keine logischen oder anderen etablierten Regeln verletzen und, wenn in ihnen neuartige Regeln zur Anwendung kommen, bedürfen diese der Rechtfertigung: siehe dazu den ersten Abschnitt.) Damit der Beweis zu überzeugen vermag, reicht dies jedoch nicht aus. Das Beweisbild muss *insgesamt* als stimmig wahrgenommen werden können: Es muss in seiner Gesamtheit übersehbar sein. Und dafür müssen nicht nur auf jeder Strukturebene die relevanten Zusammenhänge zwischen den Bestandteilen nachvollziehbar, es muss auch das Zusammenspiel der verschiedenen Ebenen erkennbar sein. Um nur einen simplen Fall anzuführen: Wenn die Oberflächenstruktur des Beweises einem *modus ponens*, also einem Schluss der Form $\varphi \to \psi, \varphi \models \psi$ entspricht, dann kann der Beweis nur überzeugen, wenn diese Form erkannt wird. Es genügt nicht, die Schritte, die zu $\varphi \to \psi$, und die Schritte, die zu $\varphi$ führen, nachvollzogen zu haben; um $\psi$ zu erreichen, bedarf es des Aufstiegs auf die nächsthöhere Ebene, auf der die Identität von $\varphi$ mit dem Antezedens von $\varphi \to \psi$ ersichtlich wird. Ohne diese Feststellung wäre der *modus ponens* von ungültigen Schlussweisen, insbesondere von $\varphi \to \psi, \psi \models \varphi$, nicht zu unterscheiden.[45]

Selbst Frege, der in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* auf die „Lückenlosigkeit der Schlussketten“ eher als auf ihre Übersichtlichkeit bedacht war, stellte seinen begriffsschriftlichen Ableitungen eine Skizze des Beweisgangs voraus.[46] Diese Skizzen sollten das Verständnis der Beweise, ihren Nachvollzug, *erleichtern*, indem sie der Leserschaft helfen, die zum Teil seitenlangen und ohne Worte auskommenden Schlussketten zu übersehen. Daraus folgt indessen nicht, dass die begriffsschriftlichen Beweise selbst unübersehbar und unverständlich wären, im Gegenteil, zumal sie sich mehr oder weniger übersichtlich darstellen lassen. Unübersehbar wären „Beweise“, die überhaupt nicht übersichtlich dargestellt und auch nicht in eine

[45] Für die detaillierte Untersuchung eines echten und nicht trivialen Beispiels – Erdős’ Beweis des Satzes von Bertrand-Tschebyschow – verweise ich auf Robinson (2000, S. 283-291). Obgleich Robinson keine philosophischen, sondern eher psychologische Fragen zu beantworten sucht, gelingt es ihm gut, die Lemmata, aus denen Erdős’ Beweis zusammengesetzt ist, zu erläutern (u. a. mit Hilfe der Tabelle auf S. 285, die ein anschauliches Bild abgibt). Auch das Zusammenspiel der verschiedenen Strukturebenen, das dem Beweis Übersichtlichkeit und dadurch erklärende Kraft verleiht, wird aus seiner Beschreibung deutlich. (Auf den S. 285-289 wird das Zusammenspiel der Hauptlemmata, also sozusagen die Oberflächenstruktur beschrieben; auf den S. 289-291 wird dann die den Lemmata zugrundeliegende Idee skizziert.)

[46] „Die Beweise sind allein in den mit ‚Aufbau‘ überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit ‚Zerlegung‘ überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen“ Frege (1893, S. V). Weiter hinten im Werk heisst es dann, diese Zerlegungen dienten „nur der Bequemlichkeit des Lesers [...]; sie könnten fehlen, ohne dem Beweise etwas von seiner Kraft zu nehmen“ Frege (1893, S. 70).

solche Darstellung übertragen, mithin von uns nicht nachvollzogen, nicht verstanden werden *könnten*.

Durch einen Beweis überzeugt werden kann freilich nur, wer ihn versteht, und als Beweis verstehen können wir ein Bild nur, wenn wir es übersehen. Ein Bild, das wir nicht übersehen, kann uns nicht als Instrument des Überzeugens dienen. Wer aber einen Beweis verstanden hat, *sollte* sich, sofern ein Beweis wirklich vorliegt, von der notwendigen Wahrheit des bewiesenen Satzes überzeugen lassen haben. Wittgenstein meint nun gerade darin das Wesentliche in der Erfordernis der Übersichtlichkeit zu erkennen:[47]

> Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozess, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, dass diese Zahl herauskommt, vermerken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiss nicht: ‚was herauskommen *soll*'.
> „Der Beweis muss übersehbar sein" heisst eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich im Beweis ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, dass es sich so ergeben *muss*.

Mathematische Beweise liefern keine Indizien oder gute Belege für die Wahrheit eines Satzes, verleihen ihr keine erhöhte Wahrscheinlichkeit. Auf diejenigen, die mit der Praxis des Beweisens vertraut sind und die nötigen Kenntnisse besitzen, üben Beweise einmal nachvollzogen einen Zwang aus. Nicht aber wie Befehle: Der Beweis gebietet nicht, den Satz, den er beweist, als notwendige Wahrheit anzuerkennen. Er zwingt insofern dazu, als er einen zwingenden Grund dafür gibt.

Mit dem Beweis eines Satzes lässt sich demnach nicht nur die Frage, ob die Aussage, die er beweist, wahr ist, beantworten, sondern auch eine Antwort auf die Frage geben, *weshalb* sie wahr sein muss (und damit auf die Frage, weshalb wir sie als notwendige Wahrheit anerkennen sollten). Von der sicherstellenden kann also eine *begründende* Funktion des Beweisens unterschieden werden, wenngleich beide eng miteinander verflochten sind. Frege schreibt dazu in seinen *Grundlagen der Arithmetik*:[48]

> Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem

[47] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.154, S. 95, III.39, S. 170.
[48] Frege (1884, S. 2).

> man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück [...].

Diese Einsicht, die der Beweis gewährt, vermag ihre Überzeugungskraft in uns nur soweit zu entfalten, wie wir von den Wahrheiten, die der Beweis *nicht* beweist, sondern als gegeben annimmt, überzeugt sind. Und so mag es den Anschein haben, als müsse die Wahrheit der ganzen Mathematik letztlich auf einigen Urwahrheiten beruhen, „die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind“.[49]

Freges Unterfangen, die letzten Urwahrheiten der Arithmetik zu finden, war seinem „Wurzeltrieb“ geschuldet: dem Drang zu wissen, „worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens“[50] ihrer Sätze beruht. Dieser tiefste Grund, auf dem sich alles andere stützt, war indes mit arithmetischen Sätzen, selbst mit denen elementarster Art, keineswegs erreicht. Für die logizistischen Augen erwiesen sich sogar einfache Gleichungen wie $5 + 7 = 12$ als eines Beweises bedürftig. Jene Urwahrheiten, zu denen Frege und nach ihm Russell und Whitehead vorgestossen waren, konnten die Erwartungen jedoch nicht erfüllen: entweder, weil sich aus ihnen (wie aus Freges Grundgesetzen) ein Widerspruch ableiten liess, oder, weil ihnen (wie dem Axiom der Reduzierbarkeit bei Russell und Whitehead) das typische Merkmal der rein logischen Wahrheiten fehlte und für ihre Anerkennung als Axiome nichts anderes sprach, als dass aus ihnen ebenjene elementaren Wahrheiten, von denen man auch ohne logischen Unterbau längstens überzeugt war, bewiesen werden konnten.[51]

In Ermangelung eines Systems selbsteinleuchtender Grundsätze, aus dem sich erwiesenermassen alles Erwünschte, aber – verbürgt durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis – nicht alles Erdenkliche ableiten lässt, müssen wir lernen, mit der

[49] Frege (1884, S. 4).

[50] Frege (1893, S. XIII) und Frege (1884, S. 3).

[51] In Mancosu (2001, S. 104-105) wird Russell in der Frage, welche Kriterien bei der Wahl der Axiome zur Anwendung kommen dürfen, eine Form von „h-inductivism“ zugeschrieben: „the acceptance of axioms for a mathematical discipline might be motivated not by criteria of evidence and certainty but rather, like hypotheses in physics, by their success in deriving and systematizing a certain number of familiar consequences“ (S. 103). Hätte Russell aber diese Position nach der Fertigstellung der *Principia Mathematica* weiterhin vertreten, hätte er Wittgensteins Kritik am Axiom der Reduzierbarkeit entkräften können, zumal das Axiom durchaus erfolgreich Russells verzweigtes Typengebäude aufrecht erhält. In seiner Einleitung zur zweiten Ausgabe der *Principia* hält Russell jedoch fest: „One point in regard to which improvement is obviously desirable is the axiom of reducibility [...]. This axiom has purely pragmatic justification: it leads to the desired results, and to no others. But clearly it is not the sort of axiom with which we can rest content“ Whitehead und Russell (1925, S. xiv). Vgl. dazu Linsky (2011, S. 128-134).

Möglichkeit von Widersprüchen zu leben (wie in der inkonsistenten Mathematik, siehe Anm. 34), oder aber bestreiten, dass eine Theorie wie die Arithmetik mit ihren elementaren, ja nachgerade trivialen Wahrheiten überhaupt einer solchen Grundlegung bedarf.[52] Die zweite Option wählend könnte man sagen, einfache Gleichungen seien zwar auf gewisse Axiome rückführbar und insofern eines Beweises fähig, deswegen aber noch lange nicht eines solchen bedürftig. Wer aufrichtige Zweifel an einer als trivial geltenden Wahrheit hegt, erlerne zuerst die Technik, die dem Satz zugrunde liegt (zum Beispiel das Einmaleins bei Gleichungen wie ‚$5 + 7 = 12$'), oder studiere noch einmal die relevanten Definitionen (man denke hier an Sätze wie ‚Der grösste gemeinsame Teiler zweier Primzahlen ist die 1'). Sich auf solche Weise der Wahrheit einer Aussage zu vergewissern, ist gegenüber dem Beweisen nicht minderwertig, im Gegenteil, setzen doch Beweise das Beherrschen zahlreicher Techniken und die Kenntnis gängiger Definitionen und Lemmata voraus.

Indessen bleibt die begründende Funktion des Beweisens auch bestehen, wenn die Forderung nach einer axiomatischen Grundlegung der Mathematik fallengelassen wird. Einen Satz begründen, heisst dann nicht, ihn auf die ihm zugrundeliegenden Urwahrheiten zurückführen, sondern seinen Zusammenhang mit anderen, bereits sichergestellten Sätzen zeigen.[53] Offenbar zeigen verschiedene Beweise desselben Satzes verschiedene Zusammenhänge auf, sodass ein Satz, der auf unterschiedlichen Beweiswegen erreichbar ist, besser beleuchtet, verständlicher erscheint. Es liegt nun nahe anzunehmen, dass einem solchen Verständnisgewinn nachgestrebt wird, wenn bereits bewiesene Sätze stets aufs Neue bewiesen werden, bis letztlich ihr trivialer Wahrheitskern offenliegt. Dabei handelt es sich freilich um keinen Wurzeltrieb hin zu den Urwahrheiten, wie Frege ihn sich für die Mathematik gewünscht hätte, sondern um den Drang, Sichergestelltes in offensichtliche, von allem Rätselhaften geklärte und entsprechend vertraute Gewissheit zu verwandeln.

In der zeitgenössischen Literatur wird diese zweite Funktion des Beweisens, die vorhin als begründende charakterisiert wurde, oft unter dem Begriff der *mathematischen Erklärung* abgehandelt. Robinson zum Beispiel schreibt: „For the most part (although sometimes a proof may establish its result without affording an explanation why it holds) a proof does indeed seem to have two different roles: to be a proof-as-guarantee and to be a proof-as-explanation".[54] Da der Beweis

[52] Für eine aktuelle Besprechung pluralistischer Ansätze (Putnam, Wittgenstein) sowie grundlagenkritischer Positionen (Rav, Lakatos), vgl. Wagner (2019).

[53] Dieser Sichtweise entspricht am ehesten eine kohärentistische Wahrheitstheorie. Wie mir scheint, könnte sich eine solche Theorie nicht nur mit dem weiter oben (im zweiten Abschnitt) angedeuteten Wahrheitskriterium vertragen, sondern auch mit schwächeren Formen des (Neo-)Logizismus. Für Letzteres, vgl. Tennant (2017).

[54] Robinson (2000, S. 279).

eines Satzes auch eine mögliche Antwort auf die Frage gibt, weshalb er wahr sein muss, ist es nicht unzutreffend, von einer *erklärenden* Funktion des Beweisens zu sprechen. Gerade wenn die Frage nach den Grundlagen der Mathematik nicht im Vordergrund steht, liegt es nahe, eher als ein Erläutern oder Erklären zu charakterisieren, was Frege und anderen als ein Begründen erschien. Allerdings muss darauf geachtet werden, nicht Unterschiedliches zu vermengen. Wie es übersichtlichere und weniger übersichtliche, aber keine unübersehbaren Beweise gibt, so mag es Beweise von grösserer und solche von geringerer Erklärungskraft geben, aber keinen Beweis, der die Wahrheit des Satzes, den er beweist, in keiner Weise begründete, sondern gleichsam nur sagte: „Dieser Satz ist wahr, glaube mir!“ Wenn Robinson indes zugesteht, dass mancher Beweis seinen Satz als mathematische Wahrheit sicherstellt, ohne jedoch zu erklären, weshalb er wahr sei, dann hat er eine (steigerbare) *Eigenschaft* im Sinn, die gewisse Beweise besitzen, andere hingegen nicht – und nicht eine *Funktion*, die jeder Beweis *qua* Beweis erfüllt.[55]

Unbestreitbar scheint mir jedenfalls die Feststellung, dass durch Beweise nicht nur neue Wahrheiten erschlossen werden, sondern auch das Verständnis dieser Wahrheiten eine Erweiterung, mitunter eine Vertiefung erfährt. Eine Behauptung, deren Beweis wir nachvollziehen konnten, verstehen wir insofern besser, als wir einen Weg kennen, der sie mit anderen Wahrheiten unauflöslich verknüpft und auf dem wir jederzeit zwischen ihnen hin und her wandeln können. Bei einer noch unbewiesenen Aussage dagegen ist nicht ohne Weiteres auszuschliessen, dass dereinst ein Weg von ihr aus in den Widerspruch führen, sie sich mithin als notwendige Falschheit erweisen wird. Gleichwohl wäre es falsch zu sagen, dass erst der Beweis einer Aussage uns erlaubt, sie zu verstehen. Denn wir verstehen gewiss auch widerlegte Aussagen. Und um überhaupt etwas beweisen zu können, müssen wir Unbewiesenes verstehen, zumal das Verstehen einer mathematischen Aussage – das

[55] Tatsächlich ist die Unterscheidung von Beweisen, die erklären, und solchen, die nicht erklären, ein wiederkehrender Topos in der Geschichte der Mathematik, wenngleich nur wenig Übereinstimmung darüber herrscht, wie die Unterscheidung zu ziehen ist. In Mancosu (2001) findet sich der Versuch, die Unterscheidung an drei verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras zu illustrieren (S. 98-100) und aus Bemerkungen anderer Autoren zu rekonstruieren (S. 101-108). Wegen der Mehrdeutigkeit des Ausdrucks ‚Erklärung‘, und auch weil es von individuellem Vorwissen und Können abhängt, ob ein Beweis erklärend wirken kann oder nicht, scheint sich am Ende der Bestandsaufnahme eher die Frage aufzudrängen, ob hier nicht vielmehr verschiedene Unterscheidungen zusammengeworfen werden. Als Paradebeispiele nicht-erklärender Beweise werden in Rota (1997) Verifizierungen angeführt, d. s. Beweise durch Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle. Obwohl das Verlangen, die Gründe für die Wahrheit eines Satzes zu kennen, mit seiner blossen Verifizierung gewiss nicht immer zu befriedigen ist, wäre es, wie mir scheint, falsch zu verneinen, dass mit der Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle ein Verständnisgewinn, etwa in Form einer Übersicht, einhergeht. Ausserdem braucht es ja noch den Nachweis, dass die Auflistung vollständig ist – dass wirklich alle Fälle berücksichtigt wurden –, was zur Begründung des so gewonnenen Satzes durchaus beiträgt.

Erfassen ihrer Bedeutung – darin besteht, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen zu können (wie sich im zweiten Abschnitt zeigte).

Fassen wir das Wichtigste zusammen. *Dass* ein Satz wahr sein muss, zeigt der mathematische Beweis, indem er einen Weg beschreibt, *wie* man ausgehend von anerkannten Wahrheiten zu dieser Einsicht gelangt. Er gibt eine Anleitung, wie wir uns selbst von der Wahrheit dieses Satzes überzeugen können. Nicht selten indes kommt es vor, dass der Weg, welcher historisch als erster beschritten wurde, schwierig, abwegig oder zufällig erscheint, sodass sein Nachvollzug Probleme bereitet und man sich zwar überzeugen liess, mithin um die Wahrheit des Satzes weiss, die Gründe dafür aber nicht klar angeben kann, da man nicht gut genug versteht, weshalb der Satz wahr ist. Immer neue Beweise desselben Satzes können nun – indem sie etwa kürzere oder begrifflich einfachere Wege anzeigen und uns triftigere Gründe geben, den Satz für wahr zu halten – dazu beitragen, diesen immer besser zu verstehen. Da mit der Zeit stets neue und kürzere Wege aus diversen Richtungen kommend das begriffliche Terrain überziehen, das den Satz umgibt, wird dieser immer näher an wohlbekannte und leicht einzusehende Wahrheiten gerückt – wird er immer vertrauter –, bis sich schliesslich seine eigene Wahrheit, sich der Satz selbst trivial ausnimmt.

Das Verstehen mathematischer Sätze erschöpft sich folglich nicht im Wissen um Satzbedeutungen und Wahrheit. Wer einen „tiefen“ Satz wie etwa den Primzahlsatz wirklich verstehen möchte, wird sich nicht mit dem erstbesten Beweis zufrieden geben. Der Ausdruck ‚verstehen‘ kann hier freilich nur vage gebraucht werden, denn Beweise können durchaus verschiedene Weisen des Verstehens befördern und dies in unterschiedlichen Ausmassen.

## 4 Worin besteht die besondere Gewissheit mathematischer Sätze?

*Der mathematische Beweis hebt aus den bezweifelbaren Aussagen eine heraus, um sie als Satz sicherzustellen, ihr diejenige Gewissheit zu verleihen, die sie in den Rang eines Theorems erhebt. Die Gewissheit, von der hier die Rede ist, bezeichnet nicht primär eine psychische Verfasstheit, sondern eine besondere Stellung innerhalb (wie auch ausserhalb) der Mathematik, die der Beweis dem Satz, den er beweist, durch seine Beweiskraft verschafft. Zu dieser Stellung gehört, dass, wenn ein Beweis einer Aussage vorliegt und als Beweis dieser Aussage anerkannt wird, an ihr kein (vernünftiger) Zweifel mehr möglich ist. Der mathematische Satz ist dem Zweifel entzogen. Aufgrund seiner Stellung darf er ohne Weiteres als Lemma,* *d. h. als Hilfssatz, in anderen Beweisen verwendet werden. Oder vielleicht treffender: Dass er ohne Weiteres als Lemma verwendet wird, zeigt seine allgemeine Anerkennung als ein Satz der Mathematik, seine besondere Gewissheit.*

Die Quellen für diese Darstellung des Zusammenhangs von Beweis und Gewissheit sind in Wittgensteins späterer Philosophie zu finden, vornehmlich in den in *Über Gewissheit* versammelten Bemerkungen. Obwohl das Hauptaugenmerk dieser Sammlung nicht auf der besonderen Gewissheit des mathematischen Satzes liegt, kommt sie doch an mehreren Stellen zur Sprache, oft zu Vergleichszwecken, sodass sich am Ende ein facettenreiches Bild ergibt.[56] In einer dieser Bemerkungen wird die Sonderstellung mathematischer Sätze zwar mit anderen Begriffen und Metaphern beschrieben als hier, der Sache nach gleichwohl ganz ähnlich wie vorhin:[57]

> Dem mathematischen Satz ist gleichsam offiziell der Stempel der Unbestreitbarkeit aufgedrückt worden. D. h.: ‚Streitet euch um andre Dinge; *das* steht fest, ist eine Angel, um die sich euer Streit drehen kann‘.

Zwei Bemerkungen später[58] heisst es dann, die Sätze der Mathematik seien Petrefakten: derart versteinert also, dass sie – wie sich die Welt der Tatsachen um sie herum auch verändert – keinen Wandel ihres Wahrheitswerts von wahr zu falsch zulassen. Dieses Feststehen, diese Unbeweglichkeit des mathematischen Satzes unterscheidet ihn von anderen Gewissheiten wie etwa der, dass meine Initialen R. B. lauten oder ich nie auf dem Mars war. Denn nicht nur könnten zukünftige Entwicklungen Sätze wie diese falsch werden lassen, solchen Gewissheiten kommt innerhalb ihrer Gebrauchsumgebung nicht dieselbe offizielle Stellung zu wie einem Theorem innerhalb der Mathematik.[59] Worin aber besteht diese besondere Stellung des mathematischen Satzes und wie wird sie ihm verliehen?

Zweifel oder Uneinigkeiten über die Wahrheit von Behauptungen werden in der Mathematik durch Beweise ausgeräumt. Wer den „Streit“ um eine Aussage für sich entscheiden möchte, liefere einen Beweis, der die anderen überzeugt. Damit aber

[56] Vgl. Wittgenstein, *Über Gewissheit*, S. 127-30, 143, 186, 209, 233, 251–253. Vgl. auch Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.39, S. 170.

[57] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 655, S. 252.

[58] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 657, S. 253.

[59] Vgl. für Teile dieser Lesart Schulte (2005, S. 64): „[Wittgenstein] does not wish to say that there is no real difference between mathematical propositions, for instance, and certain empirical ones that are regarded as ‚*incontrovertible*‘ (OC 657). He says that mathematical propositions have, ‚as it were officially, been given the stamp of incontestability‘ (OC 655). They might be called ‚fossilized‘ (OC 657), whereas a proposition like ‚I am called J.S.‘ should, even though it is correctly regarded as incontrovertible, not be so called. These two types of propositions have something in common, namely their apparent incontestability, but they play importantly different roles. One type is *officially* exempted from doubt; the other one does not do any official job at all“ (‚OC‘ steht für ‚On Certainty‘, den englischen Titel der Textsammlung, die Zahlen für die Nummer der Bemerkung, aus der zitiert wird).

der Streit entschieden, mithin die Aussage oder ihre Negation bewiesen werden kann, müssen andere Aussagen als unbestrittene und unumstössliche Wahrheiten anerkannt werden und zwar von allen Beteiligten. Die Angelfunktion mathematischer Sätze zeigt sich denn auch in ihrer allgemein akzeptierten Verwendung als Lemmata zur Entscheidung offener Streitfragen (d. h. in Beweisen für andere Sätze). Für diese Verwendung ist es unerlässlich, dass der Stempel, der die Unbestreitbarkeit anzeigt, nach aussen hin als ein offizielles, durch die mathematische Gemeinschaft beglaubigtes Kennzeichen erkennbar ist und nicht bloss das Zeichen eines subjektiven Urteils. Ist ein Streit einmal beigelegt, eine Aussage anerkanntermassen bewiesen, wird ihr, um zukünftige Fragen zu entscheiden, derselbe offizielle Stempel aufgedrückt. Dadurch ist die Aussage als mathematischer Satz gekennzeichnet und dem Zweifel entzogen. Wer dann noch ihre Gewissheit bezweifeln möchte, muss zeigen, dass der Versuch, der als ihr Beweis anerkannt wurde, in Wahrheit scheitert und keinen Beweis für sie darstellt.

Obgleich die Gewissheit bewiesener Behauptungen mit Gemütszuständen bestimmter Subjekte in einer gewissen Beziehung steht – der Beweis soll ja überzeugen und als solcher möglichst von allen anerkannt werden –, korreliert sie durchaus nicht immer mit diesen. Das Nachvollziehen eines Beweises durch ein geeignetes Subjekt mag zwar oft „völlige Überzeugung, die Abwesenheit jedes Zweifels“ und mithin *subjektive* Gewissheit über die Wahrheit des bewiesenen Satzes bewirken.[60] Doch der Versuch, einen Beweis nachzuvollziehen, kann freilich scheitern, sodass das Subjekt keine Gewissheit erlangt oder sogar irrtümlicherweise den Beweis anstelle des Nachvollzugs für gescheitert und den Satz für womöglich falsch befindet. Umgekehrt kommt es vor, dass ein erfolgloser Beweisversuch (d. i. etwas, was die Kriterien an einen Beweis *nicht* erfüllt) fälschlicherweise für ein Beweis gehalten wird, sodass sich subjektive Gewissheit über die Wahrheit einer unbewiesenen Aussage, womöglich eine Falschheit, einstellt.

Die Gewissheit des mathematischen Satzes ist also keine subjektive, verbürgt etwa durch eine besonders klare und deutliche Einsicht (um ein Kriterium aus der Tradition aufzugreifen). Sie ist, wie man geneigt sein könnte zu sagen, *objektiv.* Was heisst das aber, etwas sei objektiv gewiss? Dass im Gegensatz zur subjektiven Gewissheit „ein Irrtum nicht möglich ist“.[61] Und ein weiterer wichtiger Unterschied, auf den Wittgenstein hinweist, ist der, dass sich über objektive Gewissheit – „darüber, ob etwas gewiss *ist*“[62] – streiten lässt. Tatsächlich geschieht es öfter, als man vielleicht meinen könnte, dass mit mathematischen Argumenten darüber gestritten wird, ob es sich bei dem vorgeschlagenen Versuch, eine Aussage zu beweisen, um

[60] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[61] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[62] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 273, S. 173.

einen Beweis handelt oder nicht. Hingegen erschiene es aus mathematischer Sicht vollkommen belanglos, andere von der *eigenen* Gewissheit (davon, dass man sich eines bewiesenen Satzes wirklich gewiss genug sei) überzeugen zu wollen. Wittgensteins Hinweise deuten also in die richtige Richtung, beleuchten aber noch zu wenig den Zusammenhang zwischen der Überzeugung Einzelner und der Gewissheit des mathematischen Satzes. Die Betrachtung zweier entgegengesetzter Szenarien hilft uns weiter.

Es ist nicht undenkbar, dass der Beweis einer Behauptung, obwohl er irgendwo auf Papier tatsächlich existiert, fast allen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft unbekannt geblieben ist, oder dass sie diesem fälschlicherweise das Beweissein absprechen. Die Situation überblickend, würde man in solchen Fällen sagen, dass der Behauptung die für die Mathematik typische Gewissheit fehlt, auch wenn man sich selbst durch den Nachvollzug des Beweises von ihrer Wahrheit überzeugen und jeden Zweifel beseitigen konnte. Einzelne mögen die Behauptung zwar zu Recht für eine Gewissheit halten, aber weil zu wenige ihren Beweis kennen oder sich von ihm überzeugen liessen, ermangelt es ihr insgesamt doch des offiziellen Stempels, der sie als mathematischen Satz auszeichnete. Umgekehrt kann es vorkommen, dass eine unbewiesene, ja sogar unbeweisbare Aussage von sehr vielen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft für bewiesen gehalten wird. Wer um die Fehlerhaftigkeit des vorgeschlagenen Beweisversuchs wüsste, würde gleichwohl sagen wollen, dass die Aussage keine Gewissheit darstellt und sie fälschlicherweise in den Rang eines mathematischen Satzes erhoben wurde, selbst wenn die Anzahl derer, die ihr diesen Rang zusprechen, überwältigend ist.

Offenbar liegt eine Spannung in und zwischen diesen Feststellungen. Es macht den Anschein, als seien verschiedene Kriterien am Werk, wenn über die Gewissheit mathematischer Behauptungen geurteilt wird. Um diese Spannungen aufzulösen, gilt es daher zwei Sachlagen zu unterscheiden und ihren Zusammenhang zu untersuchen:

(i) das Vorliegen eines Beweises für eine Behauptung, d. h. eines Texts, Diagramms oder anderer Darstellungen, worin ihre notwendige Wahrheit gezeigt wird;

(ii) die breite Anerkennung einer Behauptung als mathematischen Satz, d. h. insbesondere die Akzeptanz ihrer Verwendung als Lemma in Beweisen, Definitionen etc.

*Normalerweise* folgt auf den Beweis einer Behauptung, nach dessen Prüfung durch geeignete Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft, bald ihre breite Anerkennung als ein neuer Satz der Mathematik. In der Regel zieht also das Eintreten der ersten Sachlage mehr oder weniger zeitnah das der zweiten nach sich.

Die vorherigen Betrachtungen haben jedoch gezeigt – und die folgenden Beispiele aus der Mathematikgeschichte werden es bestätigen – dass es durchaus Ausnahmen zum normalen Ablauf geben kann. Sollte Fermat einen Beweis für den nach ihm benannten Grossen Satz entgegen aller Wahrscheinlichkeit tatsächlich besessen haben, dann erfüllte dieser Satz vor 1994 die erste, nicht aber die zweite Bedingung. In der gleichen, vielleicht nicht ganz so unwahrscheinlichen Lage könnte sich zurzeit die ABC-Vermutung befinden. Womöglich liegt hier aber auch der Fall eines privaten oder esoterischen „Beweises" vor.[63] Das Vier-Farben-Theorem dagegen erfüllte elf Jahre lang nur die zweite Bedingung. Obwohl Alfred Kempes Beweisversuch von 1879 für korrekt befunden wurde und auf breite Anerkennung stiess, konnte Percy Heawood in einem 1890 veröffentlichten Papier zeigen, dass Kempes Versuch fehlerhaft, die Vermutung mithin nicht bewiesen war.[64]

In Anbetracht solcher Beispiele liegt es nahe, das Kriterium für mathematische Gewissheit an der Erfüllung *beider* Bedingungen festzumachen: dem Vorliegen eines Beweises und der breiten Anerkennung als Satz der Mathematik infolge dieses Beweises. Bewiesene Behauptungen sind demnach erst mit ihrer breiten Anerkennung in Stein gemeisselt; breite Anerkennung allein aber reicht nicht aus, ihr muss ein Beweis zugrunde liegen, damit sich mathematische Gewissheit einstellt. Doch woher wissen wir, dass sich die mathematische Gemeinschaft in Bezug auf die erste Bedingung jeweils nicht irrt und in Wahrheit bloss ein fehlerhafter Beweisversuch vorliegt? Die Antwort auf diese Frage ist freilich, dass sie sich manchmal irrt, wie dies zum Beispiel beim Vier-Farben-Theorem zwischen 1879 und 1890 der Fall war. Dies eröffnet jedoch nicht die Möglichkeit, dass sich alle immer geirrt haben und sich eines Tages herausstellt, dass niemandem je ein richtiger Beweis gelungen ist und also alle mathematischen Sätze, die man für bewiesen hielt, in Wahrheit ihres Beweises noch harren.

Gedankenspiele wie diese entspringen der konfusen Vorstellung eines Beweisbegriffs, der – obschon wir seine Anwendungskriterien zu beherrschen glauben – unseren bisherigen Gebrauch übersteigt. Dem steht die tatsächliche Anwendung des Begriffs innerhalb einer Praxis des Beweisens entgegen, die sich in vieler Hinsicht bewährt hat. Eine der Annahmen, die dieser Praxis zugrunde liegt, ja sie in der Form, wie sie gelebt wird, überhaupt erst ermöglicht, ist die, dass sich die breite Anerkennung eines mathematischen Satzes im Regelfall aus dem prüfenden Nachvollzug eines entsprechenden Beweises ergibt und nur in seltenen und – das ist der ausschlaggebende Punkt – korrigierbaren Fällen infolge eines mangelhaften Versuchs.

[63] Vgl. Castelvecchi (2020).
[64] Vgl. Wilson (2014, Kap. 5-7).

Von dem radikalen Zweifel, der einer philosophischen Behandlung bedarf, lässt sich also ein pragmatischer Zweifel unterscheiden, der seine Berechtigung im Wissen um die punktuelle Fehlbarkeit der mathematischen Gemeinschaft hat. Ein Weg, pragmatische Zweifel auszuräumen, besteht darin, immer neue und, wenn möglich, immer klarere, einfachere, übersichtlichere Beweise für die fragliche Aussage zu geben, bis die Möglichkeit, dass sich alle vorgelegten Versuche als fehlerhaft erweisen, praktisch ausgeschlossen werden kann und auch in den letzten Zweiflern die unerschütterliche Gewissheit darüber herangereift ist, dass es sich um eine Wahrheit handelt. Man könnte daher annehmen, dass vielfaches Beweisen desselben Satzes hauptsächlich dem Bestreben geschuldet sei, die Erfüllung der ersten der obigen Bedingungen, d. i. das tatsächliche Vorliegen eines Beweises, sicherzustellen. Der Blick in die Mathematikgeschichte zeigt jedoch, dass dies nicht zutrifft. So wurden zum Beispiel die immer neuen Bemühungen, den Primzahlsatz zu beweisen, auch dann noch fortgesetzt, als es an den vorliegenden Beweisen längst nichts mehr zu bezweifeln gab und sich die Aussage selbst zu einem anerkannten und als solchen verwendeten Satz verfestigt hatte. Offenbar ging es hier nicht darum, letzte Zweifel an der Gewissheit des Satzes zu beseitigen, sondern womöglich darum, ein tieferes Verständnis zu erlangen (wie im dritten Abschnitt bereits angedeutet wurde).

Eine zweite Annahme, die der mathematischen Beweispraxis zugrunde liegt (und die auch bereits im dritten Abschnitt erwähnt wurde), ist die, dass Beweise in der Regel überzeugen: dass also, nachdem ein Beweis vorgelegt wurde, dieser nicht nur die nötige Verbreitung findet und einer Prüfung unterzogen wird, sondern die Schlüsselpersonen der jeweiligen Disziplin von der Wahrheit der bewiesenen Behauptung auch überzeugt. Wäre dem nicht so, könnte die Mathematik nicht sein, was sie ist – wäre sie vielleicht der Philosophie ähnlicher. Unter diese zweite Grundannahme fällt nun auch die Forderung der Mitteilbarkeit und Nachvollziehbarkeit von Beweisen (auf die im ersten Abschnitt hingewiesen wurde). Denn, was nur einem Subjekt oder einem esoterischen Kreis von Eingeweihten verständlich bleiben muss, hätte zur Praxis des Beweisens nichts beizutragen.

## Literatur

Antonutti Marfori, Marianna (2010). „Informal Proofs and Mathematical Rigour“. In: *Studia Logica* 96.2, S. 261–272.

Avigad, Jeremy (2021). „Reliability of Mathematical Inference“. In: *Synthese* 198, S. 7377–7399.

Avigad, Jeremy, Kevin Donnelly et al. (2007). „A Formally Verified Proof of the Prime Number Theorem“. In: *ACM Transactions on Computational Logic* 9.1, 2:1–2:23.

Avigad, Jeremy und John Harrison (2014). „Formally Verified Mathematics“. In: *Communications of the ACM* 57.4, S. 66–75.

Azzouni, Jody (2004). „The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice“. In: *Philosophia Mathematica* 12.2, S. 81–106.

Bernays, Paul (1935). „Sur le platonisme dans les mathématiques“. In: *L'Enseignement Mathématique* 34, S. 52–69.

Brendel, Elke (1992). *Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners*. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

Castelvecchi, Davide (2020). „Maths Proof That Rocked Number Theory Will Be Published“. In: *Nature* 580, S. 177.

Dalen, Dirk van (2004). *Logic and Structure*. 4. Aufl. Berlin: Springer, 2004.

Dawson, John W. (2006). „Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?“ In: *Philosophia Mathematica* 14.3, S. 269–286.

De Toffoli, Silvia (2017). „'Chasing' the Diagram – The Use of Visualizations in Algebraic Reasoning“. In: *The Review of Symbolic Logic* 10.1, S. 158–186.

De Toffoli, Silvia und Valeria Giardino (2014). „Forms and Roles of Diagrams in Knot Theory“. In: *Erkenntnis* 79.4, S. 829–842.

Dummett, Michael (1963). „Realism“. In: London: Duckworth, 1963, S. 145–165.

– (1973). „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic“. In: London: Duckworth, 1973, S. 215–247.

– (1978). *Truth and Other Enigmas*. London: Duckworth, 1978.

– (2000). *Elements of Intuitionism*. 2. Aufl. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Frege, Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Koebner, 1884.

– (1893). *Grundgesetze der Arithmetik*. Bd. 1. Jena: Hermann Pohle, 1893.

Giaquinto, Marcus (2007). *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2007.

Giardino, Valeria et al., Hrsg. (2022). *Diagrammatic Representation and Inference*. Cham: Springer, 2022.

Gowers, Timothy (2023). „What Makes Mathematicians Believe Unproved Mathematical Statements?“ In: *Annals of Mathematics and Philosophy* 1.1, S. 57–110.

Hamami, Yacin (2022). „Mathematical Rigor and Proof“. In: *The Review of Symbolic Logic* 15.2, S. 409–449.

Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Leitgeb, Hannes (2009). „On Formal and Informal Provability“. In: *New Waves in Philosophy of Mathematics*. Hrsg. von Otávio Bueno und Øystein Linnebo. Basingstoke: Palgrave, 2009, S. 263–299.

Linnebo, Øystein (2024). „Platonism in the Philosophy of Mathematics“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2024 Edition. Hrsg. von Edward N. Zalta. 2024.

Linsky, Bernard (2011). *The Evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell's Manuscripts and Notes for the Second Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Mancosu, Paolo (2001). „Mathematical Explanation: Problems and Prospects“. In: *Topoi* 20, S. 97–117.

Mortensen, Chris (1995). *Inconsistent Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, 1995.

Murzi, Julien (2010). „Knowability and Bivalence: Intuitionistic Solutions to the Paradox of Knowability“. In: *Philosophical Studies* 149.2, S. 269–281.

Narkiewicz, Wladyslaw (2000). *The Development of Prime Number Theory*. New York: Springer, 2000.

Nickel, Gregor (2010). „Proof: Some Notes on a Phenomenon between Freedom and Enforcement“. In: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Hrsg. von Benedikt Löwe und Thomas Müller. London: College Publications, 2010, S. 281–291.

– (2019). „Aspects of Freedom in Mathematical Proof“. In: *ZDM Mathematics Education* 51, S. 845–856.

Pólya, George (1954/1968). *Mathematics and Plausible Reasoning, vol. I-II*. Princeton (NJ): Princeton University Press, 1954/1968.

Priest, Graham, Jeffrey C. Beall und Bradley Armour-Garb, Hrsg. (2004). *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

Priest, Graham, Richard Routley und Jean Norman, Hrsg. (1989). *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. München: Philosophia Verlag, 1989.

Quine, Willard V. O. (1951). „Two Dogmas of Empiricism“. In: *The Philosophical Review* 60.1, S. 20–43.

– (1986). „Reply to Charles Parsons“. In: *The Philosophy of W. V. Quine*. Hrsg. von Lewis Edwin Hahn und Paul Arthur Schilpp. La Salle (IL): Open Court, 1986, S. 396–403.

Rav, Yehuda (1999). „Why Do We Prove Theorems?“ In: *Philosophia Mathematica* 7.3, S. 5–41.

– (2007). „A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices“. In: *Philosophia Mathematica* 15.3, S. 291–320.

Robinson, John A. (2000). „Proof = Guarantee + Explanation“. In: *Intellectics and Computational Logic*. Hrsg. von Steffen Hölldobler. Dordrecht: Springer, 2000, S. 277–294.

Rota, Gian-Carlo (1997). „The Phenomenology of Mathematical Proof“. In: *Synthese* 111.2, S. 183–196.

Sainsbury, Richard M. (2004). „Option Negation and Dialetheias“. In: *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Hrsg. von Graham Priest, Jeffrey C. Beall und Bradley Armour-Garb. Oxford: Oxford University Press, 2004, S. 85–92.

Schulte, Joachim (2005). „Within a System“. In: *Readings of Wittgenstein's On Certainty*. Hrsg. von Danièle Moyal-Sharrock und William H. Brenner. London: Palgrave, 2005, S. 59–75.

Selberg, Atle (1949). „An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem“. In: *Annals of Mathematics* 50.2, S. 305–313.

Sriraman, Bharath, Hrsg. (2024). *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Cham: Springer, 2024.

Tanswell, Fenner (2015). „A Problem with the Dependence of Informal Proofs on Formal Proofs“. In: *Philosophia Mathematica* 23.3, S. 295–310.

Tappenden, Jamie (2008). „Mathematical Concepts: Fruitfulness and Naturalness“. In: *The Philosophy of Mathematical Practice*. Hrsg. von Paolo Mancosu. Oxford: Oxford University Press, 2008, S. 276–301.

Tatton-Brown, Oliver (2023). „Rigour and Proof“. In: *The Review of Symbolic Logic* 16.2, S. 480–508.

Tennant, Neil (2017). „Logicism and Neologicism“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2017 Edition. Hrsg. von Edward N. Zalta. 2017.

Wagner, Roy (2019). „Does Mathematics Need Foundations?“ In: *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Hrsg. von Stefania Centrone, Deborah Kant und Deniz Sarikaya. Cham: Springer, 2019, S. 381–396.

Whitehead, Alfred North und Bertrand Russell (1925). *Principia Mathematica*. 2. Aufl. Bd. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1925.

Wilson, Robin J. (2014). *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*. revised color edition. Princeton: Princeton University Press, 2014.

Wittgenstein, Ludwig (1984a). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe, Rush Rhees und G. H. von Wright. Bd. 6. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1984.

– (1984b). *Über Gewissheit*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe. Bd. 8. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1984.

– (2003). *Philosophische Untersuchungen*. Hrsg. von Joachim Schulte. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 2003.