Seminarkolloquium des Philosophischen Seminars. Beitrag zur Sitzung vom 24. Oktober 2019 von Romain Büchi

Ein Dialog über die Zahlen und das Zählen

I. Das Zahlenrätsel

Φ: Ein Rätsel, das mich schon lange[1] umtreibt, ist mir die Frage: *Was sind die Zahlen?* Nirgends konnte ich darauf eine zufriedenstellende Antwort finden. Kannst vielleicht du mir sagen, was Zahlen sind?

M: Ja hast du denn in der Schule nichts gelernt? Oder möchtest du mich mit deiner Frage in die Falle locken?

Φ: Nichts läge mir ferner, meine Liebste. Und in der Schule war ich stets aufmerksam und fleissig. Auch weiss ich mit Zahlen, selbst mit komplexen, durchaus umzugehen. Dennoch gerate ich in Verlegenheit, sobald ich sagen soll, was Zahlen sind, und nicht bloss, wie man mit ihnen umzugehen hat. Oder um den berühmten Titel einer Schrift zu der Frage[2] zu bemühen: Ich habe eine gute Vorstellung davon, was die Zahlen *sollen*, d. h. wozu sie uns dienen und wie sie dafür zu verwenden sind. *Was* sie aber sind, unabhängig von ihrer Anwendung, das weiss ich dann nicht zu sagen.

M: Ich verstehe nicht, weshalb dir dein Wissen um ihren Gebrauch nicht genügt. Für das Gebiet der Mathematik bist ja nicht du zuständig. Und solltest du dich doch dazu entschliessen, das Feld zu wechseln, würdest du beim Blick in die ersten Seiten einschlägiger Lehrbücher auf Definitionen in Hülle und Fülle stossen. Ich gebe dir, da ich der Aufrichtigkeit deines Fragens glauben möchte, eine kleine Auswahl. Sie dürfte für sich allein schon genügen, dich zufriedenzustellen. Die komplexen Zahlen, die du vorhin erwähntest, werden gerne als Paare reeller Zahlen definiert. Zur Veranschaulichung reicht man noch eine geometrische Darstellung nach, die der alte Gauss schon vor über 200 Jahren einführte. Für die reellen Zahlen finden sich, je nach Präferenz, verschiedene Definitionen. Der Vorschlag Richard Dedekinds, dessen Schrift du, wenigstens dem Titel nach, eben erwähnt hast, erfreut sich ungebrochener Beliebtheit. Dedekind konstruiert die reellen Zahlen als Schnitte durch die rationalen Zahlen, d. h. eigentlich als Paare von sich ergänzenden Mengen ebensolcher, sodass gleichsam die Lücken in diesem kleineren Zahlenbereich vollständig geschlossen werden. Die Gesamtheit dieser Schnitte bildet, algebraisch gesprochen, einen vollständig geordneten Körper. Die rationalen Zahlen wiederum werden, wie du es wohl aus der Schule kennst, als Brüche, d. h. als Paare ganzer Zahlen, eingeführt. Sie bilden zusammen mit den Operationen des Addierens und Multiplizierens einen Körper, der die ganzen Zahlen als Unterring enthält. Und auch die ganzen Zahlen können als Paare von Elementen aus dem darunterliegenden Bereich, d. h. als Paare natürlicher Zahlen, konstruiert werden. Dies geschieht, indem die Menge der natürlichen Zahlen mitsamt der auf ihr definierten Operation des Addierens zu einem Ring erweitert wird.[3] Was aber die natürlichen Zahlen sind, das dürfte wohl allen klar sein!

Φ: Ich danke dir für die klare und konzise Darstellung. Zwar leuchten nun meine Erinnerungen in neuer Frische, das Rätsel indessen ist mir geblieben, ja es hat sich sogar zugespitzt. Denn erstens wurde mir durch die Hervorhebung der Vollständigkeit ein Bruch – oder zumindest eine begrifflich höchst relevante Delle – in der schrittweisen Konstruktion des Zahlenbereichs ersichtlich. Es will mir nicht ohne Weiteres einleuchten, dass die reellen und die natürlichen Zahlen in ein und demselben Sinn Zahlen genannt werden können.[4] Diesen Zweifel können wir aber für heute gerne beiseite schieben, denn ich bin mir, zweitens, bereits bei den natürlichen Zahlen im Unklaren darüber, was sie sind. Lass es mich so ausdrücken: Wo die Zahlen unter allem, was es gibt, einzureihen sind, das weiss ich nicht, oder vielmehr ist es mir völlig unklar, da ich nicht einmal weiss, *ob* sie überhaupt darunter fallen. Manche behaupten, dass es die Zahlen nicht gibt.

M: Tatsächlich? Es gibt manche, die aufrichtig behaupten, Zahlen gebe es nicht? Was ist ihnen dann die Mathematik? Ein Märchen etwa? Oder vielleicht ein Spiel? Ja womöglich blosser Unsinn?

Φ: Du triffst es genau. Einige vergleichen die Mathematik mit Literatur.[5] Diesen Fiktionalisten zufolge existieren Zahlen und die anderen Gegenstände der Mathematik ebenso wenig wie Odysseus und die Sirenen. Die mathematischen Sätze geben demnach zwar vor, von Gegenständen zu handeln, in Wahrheit aber handeln sie von nichts und sind deshalb falsch, oder zumindest nicht wahr.

M: Nur dass im Unterschied zur Belletristik die Autoren mathematischer Abhandlungen ahnungslos darüber sind, dass die Gegenstände, über die sie schreiben, eigentlich nicht existieren und dass sie, wenn sie zum Beispiel behaupten, es existiere ein vollständig angeordneter Zahlenkörper, wörtlich genommen eine Falschheit von sich geben. Eine derartige Auffassung der Mathematik kann sich nur die Philosophie ausgedacht haben! Ich sehe ferner auch nicht, wie die Fiktionalisten die unbestreitbare Tatsache erklären wollen, dass sich die Wirklichkeit anhand mathematischer Modelle sehr erfolgreich beschreiben und zukünftige Ereignisse mitunter sehr genau vorhersagen lassen – was man beim besten Willen von der Literatur nicht behaupten kann.

Φ: Vorsicht. Der Fiktionalismus zieht bloss einen Vergleich zwischen Mathematik und Literatur. Niemand behauptet, die Mathematik sei ein belletristisches Genre. Und natürlich ist allen Fiktionalisten bewusst, dass sie die besondere Rolle der Mathematik innerhalb der Naturwissenschaften berücksichtigen und mindestens ansatzweise erklären müssen. Entsprechende Ansätze gibt es.[6] Ausserdem kamen aus der Mathematik selbst anti-realistische Impulse. Vom Standpunkt des Formalismus[7], als dessen einflussreichster Vertreter David Hilbert gilt, erscheint die Arithmetik als mechanisches (Schach-)Spiel mit leeren Zeichen. Mechanisch das Spiel, weil im Prinzip von einer Maschine durchführbar; leer die Zeichen, insofern ihnen kein anderer Inhalt zukommt, als der, den ihnen die Spielregeln, d. s. die Axiome, zuweisen. Die Zahlzeichen auf dem Papier bedeuten den Formalisten also nichts und zugleich alles. Sie sind, wenn man möchte, die Zahlen selbst.[8]

M: Wenn die Zahlzeichen aber keine Bedeutung haben, auf nichts anderes verweisen, wovon sind sie dann überhaupt Zeichen? Etwa von sich selbst? Wie auch immer. Es dürfte dir bekannt sein, dass Kurt Gödels Unvollständigkeitssätze dem Hilbertschen Programm, und mit ihm wohl auch dem Formalismus, ein Ende setzten.[9] Gödel aber ist, wie wohl die meisten Mathematiker, Realist, wenn es um die Ontologie der Mathematik geht. Die arithmetischen Sätze handeln von Gegenständen, die unabhängig von uns Menschen, unserer Sprache, unserem Denken und Handeln existieren. Es sind Gegenstände, die wir suchen und erkennen können, wenn auch freilich nicht in Raum und Zeit oder mit unseren Sinnen. Ein Schriftzeichen etwa lässt sich wegradieren, die Siebenundzwanzig dagegen besteht unveränderlich fort.

Φ: Auch in der Philosophie wurde dies vertreten. In Platons Akademie, die der Legende nach kein der Geometrie Unkundiger betreten durfte, schrieb man den mathematischen Zahlen, wie den Ideen, ein abgetrenntes, unveränderliches und ewiges Sein zu. Aristoteles verwarf dies, richtete aber den Zahlen in Anbetracht ihrer speziellen Seinsweise immerhin eine Kategorie ein, die sie sich mit den kontinuierlichen Grössen teilen durften. Auch die Pythagoräer sahen, wie er berichtet, in den Zahlen nichts von den Sinnesdingen Abgetrenntes. Vielmehr meinten sie in den Zahlen das Prinzip des Seienden überhaupt zu erkennen, woraus alles, selbst das sinnlich Wahrnehmbare, bestehe.[10] Undenkbar also für die frühe Philosophie die Vorstellung, dass sich eine Zahl hinschreiben und wieder wegradieren liesse. Frege hielt das, wie er meinte, weitverbreitete Unvermögen, Zeichen und Bezeichnetes auseinanderzuhalten, denn auch für die Krankheit der *Mathematiker*.[11] Zeit seines Lebens kämpfte er gegen sie an. Dabei bestand für ihn nie ein echter Zweifel, dass jede natürliche Zahl ein Gegenstand ist und für sich existiert, nicht wesentlich anders als er selbst oder das Deutsche Reich. Als Ludwig Wittgenstein ihn bei ihrem letzten Treffen fragte, ob er denn nie eine Schwierigkeit erkennen könne in der Lehre, wonach Zahlen Gegenstände sind, antwortete Frege: «Manchmal scheint es mir, als erblickte ich eine Schwierigkeit – dann aber wiederum sehe ich sie nicht.»[12]

M: Wenigstens scheinen die beiden Lager klar abgegrenzt. Du musst dich also bloss ihre Argumente anschauen und für die besseren entscheiden. Die Realisten musst du fragen, wie sie sich erklären, dass man Wissen erlangen kann von diesen angeblich abgetrennten und unveränderlichen Gegenständen. Und die Anti-Realisten sollen wiederum darlegen, wie es möglich ist, dass sich die Mathematik erfolgreich auf die Wirklichkeit da draussen anwenden lässt.

Φ: Leider stellt sich die Sachlage in Wirklichkeit nicht so aufgeräumt dar. Zwischen den zwei Polen findet man beinahe ein Kontinuum weiterer Positionen, die die Wahrheit für sich beanspruchen. Es gibt solche, die den Zahlen bloss eine Existenz zusprechen, die an unser Denken oder Handeln gekoppelt ist. Andere lassen die Frage, ob es Zahlen gibt, im Absoluten nicht gelten. Sie verlangen eine Ergänzung und fragen hinzu: gemäss welcher Theorie? Noch andere sprechen der Frage, ob, wie auch dem Satz, dass es Zahlen gibt, jeglichen Sinn ab.[13] Schwieriger noch als über die unterschiedlichen Positionen ist es den Überblick über die mannigfaltigen Argumente dafür oder dagegen zu behalten. Einer der meist gelesenen Aufsätze der letzten Jahre auf dem Gebiet trägt den nicht gerade vielversprechenden Titel ‚Was Zahlen nicht sein könnten‘.[14] Verstehst du nun meine Ungewissheit in der Frage, ja meine Verwirrung?

M: Durchaus. Nur scheint mir die Ursache deiner Verwirrung weniger in den Zahlen selbst, in ihrer vermeintlich mysteriösen Natur zu liegen als vielmehr in den Worten ‚es gibt‘, ‚existieren‘ und auch ‚Gegenstand‘. Oder besser gesagt: in den Bedeutungen, die man diesen Worten jeweils anheftet. Wenn es nach mir geht, darf Gegenstand alles genannt werden, worauf sich mit einem Eigennamen, einer Variablen, einer Kennzeichnung oder dergleichen Ausdrücken Bezug nehmen lässt. Demnach sind Cäsar und eine beliebige Gerade g im euklidischen Raum ebenso Gegenstände wie die Menge aller Primzahlen. Dass zu einer gegebenen Beschreibung ein entsprechender Gegenstand auch existiert, wird aus vorangegangenen Definitionen und Theoremen *bewiesen*. Da ein Beweis, damit er zum Schluss Substanzielles zeitigen kann, zu Beginn mit Inhalt gefüllt werden muss, ist folglich die Forderung, dass alles bewiesen werden müsse, unsinnig. Was aber nicht bewiesen wird, das wird *definiert*. Nicht irgendwie, sondern nach tradierten Gepflogenheiten, die übrigens unterschiedliche Arten der Definition zulassen.

Φ: Gut, dann beweise mir die Existenz der natürlichen Zahlen. Oder definiere sie zumindest.

M: Beweisen kann ich sie nicht[15], aber an eine Definition konnte ich mich soeben erinnern. In der Schrift, die du anfangs erwähntest, gab Dedekind eine Definition der natürlichen Zahlen, die dann kurz darauf von Giuseppe Peano in ein kompaktes Axiomensystem gefasst wurde.[16] Es läuft heute zumeist unter beider Namen und besteht aus den folgenden, von mir noch einmal angepassten Axiomen:[17]

(P1) $0 \in \mathbb{N}$.
(P2) Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $S(n) \in \mathbb{N}$.
(P3) Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $S(n) \neq 0$.
(P4) Wenn $m, n \in \mathbb{N}$, folgt aus $S(m) = S(n)$, dass $m = n$ ist.
(P5) Wenn $0 \in X$ und wenn aus $n \in X$ stets $S(n) \in X$ folgt, ist $\mathbb{N} \subseteq X$.

Das erste Axiom besagt, dass die Zahl 0, d. h. das Anfangselement, in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthalten ist. Das zweite, dass für jede natürliche Zahl n ihre Nachfolgerin $S(n)$ in $\mathbb{N}$ enthalten ist. Das dritte, dass die 0 die Nachfolgerin keiner natürlichen Zahl ist. Das vierte, dass keine zwei natürlichen Zahlen ein und dieselbe Nachfolgerin haben. Und das fünfte Axiom schliesslich drückt das Prinzip der natürlichen Induktion aus, wonach die natürlichen Zahlen Teilmenge jeder Menge X sind, die das Anfangselement 0 und mit jeder natürlichen Zahl ihre Nachfolgerin enthält. Ich meine nun, dass mit diesen fünf Axiomen die natürlichen Zahlen definiert sind und ihre Existenz damit hinreichend nachgewiesen ist.

Φ: Wie aber ist die Null definiert? Es scheint, als würde ihre Existenz einfach angenommen.

M: Die 0 ist, wie übrigens die ganze Menge, durch die Axiome *implizit* definiert. P3 insbesondere besagt, dass sie – im Gegensatz zu jeder anderen natürlichen Zahl – die Nachfolgerin keiner natürlichen Zahl ist. Damit ist ihre Stellung in der Reihe eindeutig bestimmt.

Φ: Diese Art des Definierens genügt mir aber nicht. Erstens ist damit noch nicht nachgewiesen, dass es eine Menge mit diesen Eigenschaften tatsächlich gibt.[18] Und zweitens sind doch damit nicht *meine* Zahlen – die, die mir am Herzen liegen und die ich seit Kinderjahren kenne – herausgegriffen. Meine Zahlen erfüllen freilich die fünf Axiome. Das tun unzählig viele andere Mengen gleicher Struktur jedoch auch.[19] Es ist also weder die Existenz der Zahlen nachgewiesen noch ist ein Merkmal angegeben, das sie von allem anderen eindeutig abhebt. Wie die Sprache indessen anzeigt, gibt es meine Lieblingszahl, wenn überhaupt, nur einmal; wir nennen sie *die* Siebenundzwanzig.

M: Auf einmal scheinst du doch klare Kenntnis von den Zahlen zu haben. Du nennst sie gar deine Zahlen. Wie können sie dir zugleich ein Rätsel sein?

Φ: So gross meine Ungewissheit in der Frage nach den Zahlen auch sein mag, sie sind mir gleichwohl alles andere als fremd, gerade die natürlichen. In meinem Leben sind sie beinahe allgegenwärtig: Schaue ich auf meine linke Hand, springt mir die Fünf nachgerade ins Auge. Grössere Zahlen „sehe“ ich zwar nicht in demselben Sinne, dennoch habe ich ein Gefühl für den Geldbetrag in meiner Brieftasche, nachdem ich zuvor dem Automaten drei Fünfziger entnommen habe. Von der 2019 weiss ich, dass ich ihrem Schriftbild in diesem Jahr noch manches Mal begegnen werde, und ich könnte, wenn ich wollte, sie heute noch zählend erreichen. Selbst von viel grösseren Zahlen, von Zahlen, die ich zählend gewiss nie erreichen würde und von denen ich aus eigener Erfahrung überhaupt nur das Abbild kennen kann, habe ich noch eine bestimmte Vorstellung – d. h. bestimmt genug, um sie mit anderen Zahlen zu summieren, sie zu verdoppeln, nach ihren Teilern zu suchen etc. Die Zahlen sind mir also, wenn ich es mir recht überlege, durchaus vertraut. Manche darunter kenne ich gut. Und ich weiss insgesamt, *was* sie sind – wenigstens solange man mich nicht danach fragt.

II. Von den Zahlen zum Zählen

M: Nun gut. Anstatt sich weiterhin von dem Zahlenrätsel in Bann ziehen zu lassen, wäre es vielleicht klüger bei dem zu beginnen, was dir am nächsten, am vertrautesten ist. Vorhin erwähntest du das Zählen. Sind die natürlichen Zahlen nicht gerade das, was beim Zählen zur Anwendung kommt?

Φ: Da kommt mir eine alte Unterscheidung in den Sinn, die wir gleich zu Beginn unserer neuen Marschroute beachten sollten. Aristoteles unterscheidet die Zahl, die einer gezählten oder zählbaren Vielheit zukommt, von der Zahl, mit der wir solche Vielheiten zählen, d. h. Anzahl von Zählzahl oder *numerus materialis* von *numerus formalis*, wie man mit den Lateinern sagen könnte.[20]

M: Wenn du unter Zählzahlen die Zeichen verstehst, von denen wir beim Zählen Gebrauch machen, dann laufen wir Gefahr, gleich in den Weg der Formalisten einzubiegen. Dich interessieren aber, wenn ich dich verstehe, die Anzahlen, d. h. das, wofür die Zahlzeichen je stehen, wenn sie denn für etwas stehen. Sollte sich herausstellen, dass sie für nichts stehen, können wir uns diesen seltsamen Markierungen auch dann noch zuwenden.

Φ: Du hast recht. Wir sollten uns also fragen, was Anzahlen sind. Und da scheint es mir, als könne Aristoteles nicht ganz falsch liegen, wenn er sie als Grössen bestimmt. Denn Anzahlen lassen sich mit Gleichartigem vergleichen und sind folglich messbar. Oder vielleicht präziser: Nicht die Anzahlen für sich lassen sich vergleichen und sind messbar, sondern die Dinge *im Hinblick auf* ihre Anzahl. Anzahlen sind Eigenschaften zunächst anderer Dinge. Die Quantität ist im Aristotelismus denn auch eine der akzidentellen Kategorien. Und da fällt mir plötzlich ein, dass die aristotelische Unterscheidung auch anders gelesen werden könnte, nämlich als eine zwischen Anzahl und Mass oder Einheit. Was ich meine, lässt sich am besten an einem Beispiel erläutern. Betrachte das vor dir auf dem Schreibtisch Liegende. Je nachdem, wie du es auffasst, wirst du ihm eine andere Anzahl beilegen. Einmal fasst du es auf als *ein* Buch, dann als *zwei* Exemplare desselben, schliesslich als insgesamt 206 Seiten oder als je 526 Bemerkungen. Aristotelisch gesprochen, bestimmt die Wahl der Einheit, oder des Masses, mit, welche Anzahl du der Sache beilegst. Sie ist sozusagen das, *womit* gezählt wird. Mit Frege könnte man auch sagen, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriff enthält.[21]

M: Mit der zweiten Lesart der Unterscheidung bin ich einverstanden. Lass uns also im Folgenden immer annehmen, dass ein geeigneter Begriff gewählt wurde. Was die Wahl der zu untersuchenden Frage angeht, habe ich indessen meine Zweifel. Angesichts der Verwirrung, in die dich die erste Was-ist-Frage stürzte, hatten wir einen anderen Weg vereinbart. Einen Weg, der vom Zählen ausgeht, weil es dir vertrauter schien. Ich schlage daher vor, dass wir versuchen, uns den Anzahlen über das Zählen zu nähern und uns fragen, wie Anzahl und Zählen zusammenhängen.

Φ: Dem hatte ich bereits zugestimmt. Im Anschluss an das bereits Gesagte zum Anzahlbegriff scheint mir zudem klar, wie das Zählen mit den Anzahlen zusammenhängt: Das Zählen ist schlicht die Messmethode, anhand derer sich Anzahlen ermitteln lassen.

M: Da wäre ich vorsichtiger. Nimm an, es lägen zwei Ansammlungen von Gegenständen vor dir und du wolltest sie im Hinblick auf ihre Grösse, genauer: auf ihre Anzahl, vergleichen. Musst du die Ansammlungen dafür je auszählen? Nicht immer. Für den Fall, dass die Gegenstände alle gleich gross sind, könntest du sie je in einer Reihe anordnen. Sind die beiden Reihen gleich lang, kannst du daraus schliessen, dass die Ansammlungen gleich gross, d. h. gleichzahlig, sind. Ist dagegen die eine Reihe länger als die andere, folgt daraus, dass der einen Ansammlung eine grössere Anzahl zukommt als der anderen. Ganz analog könntest du im Fall vorgehen, dass die Gegenstände alle gleich schwer sind.

Φ: Du triffst aber starke Annahmen, die im Allgemeinen nicht gegeben sind. Ohne solches Vorwissen wärst auch du auf das Zählen angewiesen.

M: Nicht zwingend. Ich möchte dir ein einfaches Verfahren schematisch darlegen, das ganz ohne Zeichen auskommt: Greife schrittweise aus beiden Ansammlungen je einen Gegenstand heraus und lege sie weg, sodass sichergestellt ist, dass kein schon einmal weggelegter Gegenstand ein weiteres Mal herausgegriffen wird. Ist der Vorrat an noch nicht weggelegten Gegenständen für beide Ansammlungen im gleichen Schritt aufgebraucht, sind sie gleichzahlig. Ansonsten ist die Ansammlung, bei der Gegenstände übrig bleiben, die grössere der beiden. Mathematisch gesprochen stellst du eine beiderseits eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen her, bis mindestens eine der beiden Mengen ausgeschöpft ist. Sind beide Mengen im gleichen Schritt ausgeschöpft, gelingt die Zuordnung und es folgt, dass die Mengen gleichzahlig sind. Ist dagegen die eine vor der anderen ausgeschöpft, ist keine beiderseits eindeutige Zuordnung möglich und es folgt, dass die Mengen ungleichzahlig sind.[22]

Φ: Zugestanden, die Gleichzahligkeit zweier Ansammlungen lässt sich unter Umständen anhand deines Verfahrens prüfen. Die Nachteile gegenüber dem Zählen sind gleichwohl offensichtlich. Erstens wüsstest du im Fall der Ungleichzahligkeit nicht zu sagen, um wie viel die eine Ansammlung grösser als die andere ist. Du hast auf die Frage nach der Anzahl – danach, *wie viele* Gegenstände den Ansammlungen angehören – keine Antwort, sondern kannst nur feststellen, ob ihnen gleich viele angehören oder welcher der beiden mehr. Das hängt zweitens damit zusammen, dass in dem Verfahren nicht unterschieden wird zwischen gemessener Grösse und Mass. Auf die Frage, von welcher der beiden Ansammlungen die Grösse gemessen wurde, gibt es keine Antwort. Sie sind gewissermassen gemessene Menge und Mass zugleich. Daraus folgt drittens, dass Messungen dieser Art, wenn es denn Messungen sind, besondere Umstände erfordern, ohne deren Eintreten das Zählen dagegen problemlos auskommt. Die zu vergleichenden Ansammlungen müssen in raumzeitlicher Hinsicht so zusammenliegen, dass ein simultanes Herausgreifen und Weglegen von Paaren, wie von dir beschrieben, möglich ist. Beispielsweise wäre es einem Hirten unmöglich, auf diese Weise zu prüfen, ob die Herde, die er morgens aus dem Stall liess, gleichzahlig ist zu der Herde, die er abends wieder eintreibt.

M: Du scheinst hier ausser Acht zu lassen, dass das Zählen selbst auf einer beiderseits eindeutigen Zuordnung beruht, nämlich der verwendeten Zahlzeichen und der zu zählenden Gegenstände.[23] Vom mathematischen Standpunkt aus ist das Zählen nichts anderes als ein Vorgang zur Herstellung einer solchen Zuordnung. Oder in etwas präzisere Sprache gefasst: Beim Zählen einer endlichen Menge $\mathfrak{U}$ von unter einen bestimmten Begriff fallenden und nun zu zählenden Gegenständen mittels eines wohlgeordneten Zahlzeichensystems $(N, <)$ wird eine Relation Z hergestellt, die eine Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathfrak{U} \times N$ ist und folgende Eigenschaften besitzt:

(Z1) $\forall x \in \mathfrak{U},\ \exists n \in N : xZn;$
d. h. jeder Gegenstand ist einem Zahlzeichen zugeordnet (Z ist linkstotal).

(Z2) $\forall x \in \mathfrak{U},\ \forall m, n \in N : (xZn \wedge xZm) \rightarrow m = n;$
d. h. jeder Gegenstand ist höchstens einem Zahlzeichen zugeordnet (Z ist rechtseindeutig).

(Z3) $\forall x, y \in \mathfrak{U},\ \forall n \in N : (xZn \wedge yZn) \rightarrow x = y;$
d. h. jedem Zahlzeichen ist höchstens ein Gegenstand zugeordnet (Z ist linkseindeutig).

(Z4) $\forall x \in \mathfrak{U},\ \forall m, n \in N,\ \exists y \in \mathfrak{U} : (xZn \wedge m<n) \rightarrow yZm;$
d. h. den Zahlzeichen sind ihrer Reihe nach die Gegenstände zugeordnet.

Jede Relation Z, die diese vier Bedingungen erfüllt, definiert eine injektive Funktion[24] ζ von $\mathfrak{U}$ auf N. Nennen wir sie eine Zählfunktion auf $\mathfrak{U}$. Beim Zählen wird also die Menge der zu zählenden Gegenstände injektiv auf die Reihe der Zahlzeichen abgebildet. Das Bild der abzuzählenden Menge $\mathfrak{U}$ unter einer Zählfunktion ζ ist aufgrund der Eigenschaften Z3 und Z4 mit einem Anfangssegment von $(N, <)$ identisch. Für den Fall, dass $\mathfrak{U}$ n Elemente enthält, handelt es sich dabei um die aus den ersten n Gliedern der Zahlzeichenreihe bestehende Menge A_n, d. h. um die Menge der in der Zählung tatsächlich verwendeten Zeichen. Als endliche Teilmenge von N enthält A_n ein eindeutiges Maximum. Es ist dies das Zeichen der Anzahl von $\mathfrak{U}$. Da, sobald $\mathfrak{U}$ von einer Zählfunktion surjektiv auf A_n abgebildet wird, dies auch von jeder anderen gilt, hängt unser Begriff des Anzahlzeichens nicht von der Wahl einer bestimmten Funktion ab. Er ist somit wohldefiniert, und zwar nicht nur im mathematischen Sinne, sondern auch hinsichtlich seiner Anwendbarkeit auf unsere Praxis des Zählens, deren – recht besehen – erstaunlichster Zug es ist, dass die Reihenfolge, in der die zu zählenden Gegenstände gezählt werden, für das Ergebnis der Zählung unerheblich ist.

Φ: Sehr schön. Denke dir jedoch folgenden Fall: Es soll die Anzahl Münzen, die verschlossen in einer undurchsichtigen Urne liegen, durch Zählen ermittelt werden. Das Öffnen der Urne hätte zur Folge, dass sich einige der Münzen – man weiss nicht wie viele – in Luft auflösen würden. Um sie zu zählen, müsste aber die Urne, die wir uns als nicht einmal für Röntgenstrahlen durchlässig denken, geöffnet werden. Eine Zählung zur Ermittlung der ursprünglichen Anzahl Münzen ist hier also unmöglich. Und doch würde man sagen wollen, dass dem Begriff ‚Münze in der Urne' schon vor der Urnenöffnung eine *bestimmte* Anzahl zukommt.

M: Mit Unmöglichkeiten dieser und ähnlicher Art kann es die Mathematik nicht zu tun haben. Ob die Umstände gerade so gelagert sind, dass eine Zählung undurchführbar ist – das hat die Mathematik nicht im Geringsten zu kümmern, wo sie darum bemüht ist, einen *mathematischen* Begriff, wie eben jenen der Anzahl, zu definieren. Über solche Schwierigkeiten sieht die Mathematik hinweg, ja muss sie hinwegsehen, wenn sie reine Mathematik bleiben möchte.

Φ: Einverstanden. Wie aber gedenkst du den mathematischen Begriff der Anzahl über jenen des Anzahl*zeichens* zu definieren – denn das ist ja hier die Stossrichtung –, wenn doch dieser Begriff (‚Anzahlzeichen von $\mathfrak{U}$') nur unter der Annahme nicht leer bleibt, dass eine Zählfunktion auf $\mathfrak{U}$ tatsächlich *hergestellt* wurde.

M: Es genügt mir die *Möglichkeit*, eine Zählfunktion herzustellen – und dabei habe ich, wie gesagt, nicht die Machbarkeit im Sinn. Das Zeichen der Anzahl einer Menge wäre demnach jenes Element aus $(N, <)$, das man beim Herstellen einer Zählfunktion zuletzt erreichen *würde*. Wie daraus der Anzahlbegriff zu gewinnen wäre, haben wir ja noch nicht diskutiert.

Φ: Ich möchte allerdings ein wenig bei deiner, wie du meintest, mathematischen Auffassung des Zählens verweilen. Denn nebst dem Problem der Modalität – die Möglichkeit, von der du sprichst, scheint mir gleichsam eine schattenhafte Wirklichkeit[25] – sehe ich noch weitere. Als erstaunlichsten Zug des Zählens nanntest du die Tatsache, dass die Reihenfolge, in der die Gegenstände gezählt werden, für das Ergebnis der Zählung belanglos ist. Dies spiegelt sich, wie ich meine, auch darin, dass eine Zählerin zu keiner Zeit ab dem zweiten Zählschritt wissen muss, welchen der bereits gezählten Gegenstände sie welchem Zeichen zugeordnet hat. Weshalb sollte also gerade die Paarbildung von gezähltem Gegenstand und verwendetem Zahlzeichen für wesentlich gehalten werden? Man könnte mit ebenso gutem Grund behaupten, dass beim Zählen Teilmengen der abzuzählenden Menge, d. h. jeweils die Menge der bereits gezählten Gegenstände, den Zahlzeichen zugeordnet werden: die Menge bestehend aus dem im ersten Schritt herausgegriffenen Gegenstand dem Zeichen 1, die Menge bestehend aus den im ersten und im zweiten Schritt herausgegriffenen Gegenständen dem Zeichen 2 etc.

M: Gegen diese Zuordnung würde indessen dasselbe Argumente sprechen wie gegen meinen Vorschlag. Oder könntest du im Allgemeinen angeben, welche Teilmenge du mit welchem Zeichen gepaart hattest? Jedenfalls scheint mir die Frage, ob sich die Zählenden an die einzelnen Zuordnungen erinnern, belanglos für die mathematische Begriffsbildung.

Φ: Da bin ich mir nicht sicher. Vermengst du nicht unterschiedliche Dinge? Der Begriff der Zuordnung passt doch viel eher auf das Nummerieren als auf das Zählen. Und Gegenstände zu zählen, heisst nicht, sie auch zu nummerieren. Nicht ein Zuordnen oder Paaren ist das Zählen, sondern ein Trennen, wie mir nunmehr scheint. In jedem Zählschritt trenne ich einen Gegenstand aus der Menge der zu zählenden Gegenstände heraus und verschiebe ihn in die Menge der schon gezählten Gegenstände. Dies wiederhole ich so oft, wie die erste der beiden Mengen Elemente zählt, und dabei achte ich darauf, dass die Trennung streng aufrecht erhalten bleibt. Ist ein Gegenstand von der abzuzählenden Menge einmal in die Menge der gezählten verschoben, muss er dort bleiben. Ausserdem verschiebe ich auf einmal nur so viele Gegenstände, wie ich Stellen in der Reihe der Zahlzeichen fortschreite, d. h. wenn ich einen Gegenstand heraustrenne und weglege, dann schreite ich eine Stelle in der Reihe voran, wenn zwei, dann zwei auf einmal etc.

M: Ich sehe nicht, wie dein Vorschlag ohne Zuordnung auskommen könnte. Wie möchtest du die Koppelung der beiden wesentlichen Vorgänge – des Weglegens der gezählten Gegenstände und des Fortschreitens in der Reihe der Zahlzeichen – sonst mit mathematischen Begriffen einfangen?

Φ: Lass es mich nicht für das Zählen, sondern für das Verfahren zur Prüfung der Gleichzahligkeit versuchen, das du oben vorgestellt hattest. Da scheint mir mein neuer Ansatz vielversprechender. Möglicherweise kommen wir dann für die Gewinnung des Anzahlbegriffs ohne Analyse des Zählens aus. Angenommen, es seien mir zwei auf ihre Anzahl hin zu vergleichende Mengen A und B gegeben. Setze nun die Anfangsbedingungen wie folgt: $A_g := \emptyset$, $A_u := A$, $B_g := \emptyset$, $B_u := B$. Greife ein beliebiges Element a in A_u und ein beliebiges b in B_u heraus und setze neu:

$$\begin{aligned} A_g &= A_g \cup \{a\} \\ A_u &= A_u \setminus \{a\} \\ B_g &= B_g \cup \{b\} \\ B_u &= B_u \setminus \{b\} \end{aligned}$$

Wiederhole diesen Schritt bis folgende Terminationsbedingung erfüllt ist: $A_u = \emptyset$ oder $B_u = \emptyset$. Bei Erfüllung der Terminationsbedingung lassen sich dann zwei Fälle unterscheiden: (1) $A_u = B_u$, woraus folgt, dass A und B gleichzahlig sind; (2) $A_u \neq B_u$, woraus folgt, dass A und B ungleichzahlig sind.

M: Erstens lieferst du damit keinen Begriff, sondern so etwas wie die Anleitung für eine Methode zur Entscheidung der Frage nach der Gleichzahligkeit zweier gegebener Mengen, wobei diese Methode freilich zeitgebunden ist. Wonach in der reinen Mathematik gesucht wird, insbesondere in den Grundlagendisziplinen, sind dagegen abstrakte, rein logische Begriffe. Für die Zeit ist da kein Platz, ausser natürlich, sie tritt selbst als Variable oder Parameter auf. Zweitens wird durch die gleichzeitige Abtrennung je eines Gegenstands aus A und eines andern aus B in jedem Schritt eine eineindeutige Beziehung definiert.

Φ: Liesse sich denn das Wesentliche meiner Idee nicht mengentheoretisch fassen? Das wäre doch auch in deinem Sinne.

M: Vielleicht. Wesentlich an deiner Methode scheinen mir die Reihen von Teilmengen, die bei ihrer Umsetzung gebildet werden. Nicht nur werden die Reihenglieder schrittweise gebildet, die Reihen beginnen auch an der jeweils gleichen Stelle, d. i. bei der leeren Menge oder, auf der anderen Seite des Zählgrabens, bei den vollzähligen Mengen, und werden, als wären sie aneinandergekoppelt, im Gleichschritt weitergeführt. Die besondere Art ihrer Bildung verleiht ihnen besondere Eigenschaften. Sie macht sie zu Ketten. Der Operation, durch welche ein Glied der jeweiligen Reihe aus dem anderen entsteht, entspricht indes eine Relation, welche die Reihe ordnet.[26] Indem wir nun die Merkmale dieser Relationen, und auch ihre Koppelung, geschickt in die gleich folgenden Definitionen einbauen, gelingt es uns womöglich, einen anderen Begriff der Gleichzahligkeit zu gewinnen. Seien also m, n zwei auf ihre Gleichzahligkeit hin zu prüfende Mengen:

(D1) $x\dot{K}y :\Leftrightarrow x \subsetneq y \wedge \forall z((x \subsetneq z \wedge z \subseteq y) \to z = y)$, für beliebige $x, y \in \mathfrak{P}(m)$
Zunächst definieren wir auf der Potenzmenge von m – und analog auf der Potenzmenge von n – die Beziehung ‚x ist eine grösste echte Teilmenge von y'.[27]

(D2) $x\ddot{K}y :\Leftrightarrow x_1\dot{K}y_1 \wedge x_2\dot{K}y_2$, für beliebige $x, y \in \mathfrak{P}(m) \times \mathfrak{P}(n)$
Um die Ketten, welche die Relation $\dot{K}$ hervorbringt, aneinanderzukoppeln, erweitern wir $\dot{K}$ sodann auf das kartesische Produkt der Potenzmengen von m und n.

(D3) $\ddot{K}^* := \bigcap\{R \subseteq [\mathfrak{P}(m) \times \mathfrak{P}(n)] \times [\mathfrak{P}(m) \times \mathfrak{P}(n)] | R \text{ ist transitiv}, \ddot{K} \subseteq R\}$
Die Beziehung, Glieder derselben gekoppelten Ketten zu sein, ist aber nichts anderes als die transitive Hülle der erweiterten Relation $\ddot{K}$.

(D4) $mGn :\Leftrightarrow ((\emptyset, \emptyset), (m, n)) \in \ddot{K}^*$
Gleichzahlig sind zwei Mengen demnach genau dann, wenn es zwei aneinandergekoppelte, je bei der leeren Menge beginnende Ketten gibt, die bis zu den beiden zu vergleichenden Mengen reichen (d. h. bei ihnen enden).

Φ: Oh je, das sieht aber viel komplizierter aus, als ich gehofft hatte. Wie könnte ein solches Ungetüm gegen das elegante Zuordnungsprinzip[28] je ankommen?

M: So harmlos, wie es aussieht, ist das Zuordnungsprinzip keineswegs. Es lässt sich mit den Mitteln der Prädikatenlogik erster Stufe jedenfalls nicht ausdrücken – genauso wenig wie das Prinzip hier, das wir, um die zwei auseinanderzuhalten, das Kettenprinzip nennen sollten. An einem Beispiel lässt sich leicht veranschaulichen, wie es arbeitet. Lass uns also das Kettenprinzip auf die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{A, B, C\}$ anwenden. Die dazugehörigen Potenzmengen sind freilich überschaubar:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \text{ und}$$
$$\{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}.$$

Die Relation $\dot{K}$ bringt nun auf beiden Potenzmengen verschiedene Ketten hervor, unter anderem diese beiden:

$$\{(\emptyset, \{1\}),\ (\{1\}, \{1, 2\}),\ (\{1, 2\}, \{1, 2, 3\})\} \text{ und}$$
$$\{(\emptyset, \{C\}),\ (\{C\}, \{A, C\}),\ (\{A, C\}, \{A, B, C\})\}.$$

Mittels kartesischem Produkt koppeln wir jetzt diese beiden Ketten gliedweise aneinander, sodass eine doppelte Kette entsteht, die eine Teilmenge des Umfangs der erweiterten Relation $\ddot{K}$ ist:

$$\{([\emptyset,\emptyset],[\{1\},\{C\}]),\ ([\{1\},\{C\}],[\{1,2\},\{A,C\}]),$$
$$([\{1,2\},\{A,C\}],[\{1,2,3\},\{A,B,C\}])\}.$$

Indem wir schliesslich noch die transitive Hülle von $\ddot{K}$ bilden, schaffen wir ein Mittel, um auszudrücken, dass das Paar bestehend aus den beiden zu vergleichenden Mengen einer doppelten Kette angehört, die bei dem Paar bestehend aus zwei Vorkommnissen der leeren Menge ihren Anfang nimmt. Die Zughörigkeit der beiden Mengen zu einer solchen Kette definiert nach dem Kettenprinzip ihre Gleichzahligkeit.

Φ: Der vorletzte Schritt, die Bildung der transitiven Hülle, bereitet mir noch Schwierigkeiten. Ich sehe, zum Beispiel, wie sich aus der Beziehung, in der ich zu meinen Erzeugern stehe, eine umfassendere und transitive Beziehung ergibt, in der ich zu allen meinen Vorfahren stehe. Wie aber verhält sich die Hüllenbildung bei Ketten unendlicher Länge? Schlägt, um ein Beispiel aus der Arithmetik zu wählen, die transitive Hülle der Nachfolgerrelation auf den natürlichen Zahlen wirklich eine Brücke von der 0 bis hin zu $\aleph_0$, der ersten transfiniten Kardinalzahl? Das würde mich überraschen. Andererseits wäre das Kettenprinzip ohne Brücken dieser Art auf den unendlichen Fall nicht anwendbar und folglich für dich kaum von Interesse. Oder täusche ich mich?

M: Du sprichst hier tatsächlich einen für mich wichtigen Punkt an. Weshalb er aber *dir* Schwierigkeiten bereiten soll, das will mir nicht einleuchten. Fragtest du nicht nach *deinen* Zahlen, den Zahlen, die dir anscheinend am Herzen liegen und die du seit deiner Kindheit zu kennen meinst? Wir waren deswegen übereingekommen, zunächst nur die natürlichen, also endliche, Zahlen, in den Blick zu nehmen und uns ihnen über das Zählen zu nähern. Oder sind dir die transfiniten etwa ebenso vertraut? Und auch das Zählen, wie du es gelernt hast, ist eine Methode zur Ermittlung der Kardinalität endlicher Mengen. Oder hast du etwa vor, eine unendliche Menge abzuzählen? Die Übertragung des Zählens auf den unendlichen Fall bedarf grosser Bedachtsamkeit und einiger theoretischer Vorarbeit, die uns auf ganz andere Pfade führen würde. Ich möchte hier lediglich zwei Richtungen andeuten: Ein eher marginaler Zweig der Graphentheorie untersucht Strukturen, die deiner Vorstellung unendlicher Ketten nahekommen.[29] Und italienische Mathematiker haben eine neue Zählweise für unendliche Mengen eingeführt, die der Intuition gerecht wird, dass eine Menge, die in einer zweiten als echte Teilmenge enthalten ist, von geringerer Kardinalität sein muss als jene zweite.[30] Daran würde ich anknüpfen – aber nicht jetzt.

Φ: Du hast wohl recht. Vielleicht neige ich manchmal dazu – der Vorwurf ist nicht neu – , über die Grenzen meines Gebiets in das anderer vorzudringen, um mich dort ein wenig aufzuspielen. Gleichwohl sollte es mir doch erlaubt sein, über das Unendliche nachzudenken und mich auch dazu zu äussern, wenn mir etwas Bedeutsames auffällt. Jedenfalls erscheinen mir die beiden Ansätze, die du genannt hast, durchaus vielversprechend. Wir sollten sie bei einer anderen Gelegenheit wieder aufnehmen. Lass uns jetzt aber zu dem vereinbarten Gegenstand – den natürlichen Zahlen und dem Zählen – zurückkehren.

III. Vom Zählen zu den Zahlen

M: Wie aber soll es weitergehen? Angenommen, dein alternatives Prinzip der Gleichzahligkeit bewähre sich im Endlichen. Was schliesst du daraus? Bei den Zahlen sind wir damit jedenfalls nicht angekommen, ja noch nicht einmal beim Zählen.

Φ: Das stimmt. Wie du aber sehr wohl weisst, sind viele vor uns den Weg von der Gleichzahligkeit zu den Zahlen schon gegangen. Wieso sollten nicht auch wir diesen Weg einschlagen? Indem wir zudem das Zählen als eine besondere Anwendungsart des Kettenprinzips auffassen, eröffnen wir einen Pfad, der vom Zählen über das neue Prinzip zu den Zahlen führt.

M: Wie möchtest du das Zählen genau fassen, damit es als Spezialfall der Ermittlung von Gleichzahligkeit nach deiner Methode erscheint?

Φ: Ganz wie die Befürworter des Zuordnungsprinzips. Ich ersetze die eine Menge durch die Menge der natürlichen Zahlen.

M: Vorsicht. Dein Vorschlag würde eine beträchtliche Anpassung des Kettenprinzips erforderlich machen, da die natürlichen Zahlen nicht ohne Weiteres in der Beziehung $\dot{K}$ zueinander stehen. Sie sind ja, zunächst einmal, keine Mengen.

Φ: Vielleicht sind sie es! Oder besser noch: Das Kettenprinzip zwingt uns, sie als Mengen zu erkennen. Könnte nicht gerade dieser Zwang für die Annahme des Kettenprinzips sprechen? Dagegen erscheinen die Zahlen im Licht des Zuordnungsprinzips ganz unstrukturiert und hinsichtlich ihrer Seinsart ebenso beliebig wie die zu zählenden Gegenstände.

M: Wie kommt es, dass du auf einmal so zuversichtlich bist? So kenne ich dich gar nicht. Lass uns, bei aller Vorfreude, zuerst das Bild des Zählens, das dir jetzt vorschwebt, genauer fassen. Klar ist, dass eine der beiden aneinandergekoppelten Ketten aus Teilmengen der abzuzählenden Menge besteht, während die positiven ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung die andere Kette bilden. Die erste Kette beginnt bei der leeren Menge, die zweite bei der 0; es folgen darauf, gekoppelt an die 1, die Menge bestehend aus dem Gegenstand, der im ersten Schritt gezählt wurde, gekoppelt an die 2, die Menge der Gegenstände, die in den ersten beiden Schritten gezählt wurden, gekoppelt an die 3, die Menge der Gegenstände, die in den ersten drei Schritten gezählt wurden, etc., bis im letzten Schritt die ganze Menge erreicht ist, die es abzuzählen galt. Die Anzahl der gezählten Gegenstände entspricht dann der Zahl, die sich zuletzt einstellt. Oder um es in den definierten Symbolen auszudrücken:

(D5) n ist die Anzahl von $m :\Leftrightarrow ((\emptyset, 0), (m, n)) \in \ddot{K}^*$

Φ: Genau so hatte ich mir das vorgestellt. Aus deiner Definition geht zudem klar hervor, was ich bereits vermutet hatte: dass die Zahlen einander enthaltende Mengen sein müssen. Der Weg über die Äquivalenzklassen der Gleichzahligkeit ist uns damit versperrt. Die 0 können wir zwar weiterhin als die leere Menge definieren. Die Definition der 1 als die Menge – oder, schlimmer noch, als die Klasse – aller Mengen, die zu jener Menge gleichzahlig sind, die nur die leere Menge enthält, lässt sich jedoch nicht aufrechterhalten. Kannst du mir weiterhelfen?

M: Es ist nicht schwer mit einer passenden Abfolge von Mengen aufzuwarten. Ich erinnere mich an ein junges Genie, das eine besonders elegante Definition vorgeschlagen hat:[31]

$0 := \emptyset$ und $n + 1 := n \cup \{n\}$ für alle weiteren Zahlen

Daraus ergibt sich die Kette:

$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.

In jedem Kettenglied sind alle Vorgänger nicht nur als Teilmengen, sondern sogar als Elemente enthalten. Damit fällt die strenge Ordnung auf den natürlichen Zahlen mit den mengentheoretischen Beziehungen $\subsetneq$ und $\in$ zusammen.[32]

Φ: „Heureka!“, möchte man ausrufen. Da scheint sich alles ineinander zu fügen. Ist das Zahlenrätsel hiermit gelöst? Nicht nur dein Stirnrunzeln lässt mich Düsteres erahnen. Die elegante Definition, für die ich dir sehr dankbar bin, ist, wie ich gerade bemerkt habe, fast hundert Jahre alt. Wenn das des Rätsels Lösung gewesen wäre, wie könnte es mich heute noch umtreiben?

M: Wie ich schon andeutete, ist es nicht schwer, weitere Ketten zu basteln, die deinen Vorstellungen ebenso gut gerecht würden. Die Dedekind-Peano-Axiome haben unzählig viele isomorphe Modelle, in ihrer erststufigen Formulierung sogar Nicht-Standard-Modelle. Welches dieser Modelle soll nun mit deinen Zahlen, mit den Zahlen, die dir angeblich so vertraut sind, identisch sein?[33]

Φ: An diesem Punkt waren wir schon einmal, wie ich mich jetzt erinnere. Es scheint fast, als hätten wir uns im Kreis gedreht.

M: Ein möglicher Ausweg bestünde vielleicht darin, mir zu folgen und dich mit abstrakteren Charakterisierungen zufrieden zu geben. Verzichte auf die Forderung, *jede einzelne* Zahl als einen bestimmten Gegenstand identifizieren zu müssen, und halte allein an der Forderung nach einer Beschreibung des *ganzen Systems* fest, wodurch es bis auf Isomorphie festgelegt ist.[34] Vielleicht solltest du schlicht aufhören zu fragen, was die Eins, oder was die Drei sei, und dich mit einer Antwort auf die allgemeine Frage begnügen, was die natürlichen Zahlen für ein Ganzes bilden.

Φ: Genau das tun die Strukturalisten unter uns. Die Drei, zum Beispiel, ist ihnen dann eine bestimmte Stelle in einem beliebigen System von bestimmter Struktur. Aber bin ich damit meinen Zahlen näher gekommen? Ist meine Vorstellung davon, was eine Struktur ist, und was eine einzelne Stelle darin, denn klarer als die, die ich von den Zahlen zu Beginn hatte?[35]

M: Das kann ich dir nicht beantworten. Schien dir der Mengenbegriff denn klarer?

Φ: Gut, dass du fragst. Eine böse Ahnung beschlich mich schon vorhin, als die Euphorie noch überwog. Und nun muss ich feststellen, dass mir die Zahlen in deinen Händen ganz fremd geworden sind. Denn was weiss ich schon von Mengen? Was soll das überhaupt sein, eine Menge? Es drängen sich hier wieder die gleichen Fragen auf, an denen sich unser Gespräch entzündete, nur diesmal in Bezug auf Mengen: ob es sie überhaupt gibt, ob sie von uns erdichtet oder erfunden wurden, oder ob sie schon immer da waren etc. etc.

M: Eine Menge ist schlicht eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Gegenständen unseres Denkens zu einem Ganzen.[36] Darüber hinaus gibt es für verschiedene Zwecke unterschiedliche Axiomatisierungen der Mengenlehre, aus denen die Beschaffenheit von Mengen und ihre Beziehungen zueinander genauestens hervorgehen.

Φ: Nach deiner Definition wäre ja die leere Menge eine Zusammenfassung von keinen Gegenständen. Bei nicht-leeren Mengen hingegen stellt sich die Frage, ob sie etwas anderes sind als ihre Elemente – etwas, das über oder neben ihnen auch noch existiert – oder eben nicht. Wenn eben nicht, dann will ich sogleich wissen, was denn ihre Elemente für Gegenstände sind. Und auch wenn sich die Menge als etwas Zusätzliches neben ihren Elementen herausstellt, frage ich mich unweigerlich, was es mit diesen Gegenständen auf sich hat, die nach dem Axiom der Extensionalität eine jede Menge zu der Menge macht, die sie ist. Lautet die Antwort jeweils „Mengen“, kann ich nicht anders, als weiterzufragen.

M: Die einen werden dir antworten, dass es Urelemente braucht, die selbst keine Mengen sind. Andere betrachten eine Hierarchie, die ausgeht von der leeren Menge und allein aus Mengen besteht.[37] Ich sehe nicht, woran du dich stösst.

Φ: Ist es nicht seltsam, die Hierarchie der Mengen ausgerechnet auf jener „Menge“ abzustützen, die sich von allen anderen Mengen dadurch unterscheidet, dass sie ebenjene Eigenschaft nicht besitzt, die Mengen eigentlich auszeichnet, nämlich Elemente zu enthalten? Und die, die Existenz von Urelementen annehmen, würde ich fragen wollen, von welcher Art diese Gegenstände sein sollen und wie viele es von ihnen braucht.

M: So viele, wie es der jeweilige Zweck nun einmal erfordert. Wahrlich, man kommt mit dir auf keinen grünen Zweig! Du kommst mir vor wie ein Kind, das sich bei keiner Antwort lange aufzuhalten vermag und immerzu weiterfragt, da es noch nicht gelernt hat, wann damit Schluss sein sollte. Es hat keinen Zweck, dieses Gespräch weiterzuführen. Du hast von mir viel erfragt und nichts gelernt.

Φ: Es ist nicht wahr, dass ich nichts gelernt habe. Unser Gespräch war für mich sehr lehrreich.[38] Dafür, und auch für deine Geduld, gebührt dir mein Dank. Jetzt möchte ich aber deine wertvolle Zeit nicht länger in Anspruch nehmen und erwähne bloss die wichtigste Lektion: Es ist ein Irrtum zu glauben, man könne von den „Kleinkinder-Zahlen“ auf rein logischen oder mathematischen Wegen fortschreitend eine zufriedenstellende Antwort auf die Frage finden, was sie sind.[39]

M: Na dann hat das Gespräch wenigstens eine von uns weitergebracht.

Anmerkungen

[1]So lange nun auch wieder nicht, wenn man die ganze Geschichte der Philosophie zum Massstab nimmt, zumal die Frage, was Zahlen sind, im Gegensatz zu anderen grossen Was-ist-Fragen, nicht immer schon als aporetisch und als ein Fall für die Philosophie galt. Obschon die Frage mit der fortschreitenden Erweiterung des Zahlbegriffs gewiss immer ungemütlicher wurde, scheint mir erst Gottlob Frege die Tiefe der philosophischen Probleme, die sie aufwirft, ermessen zu haben. Die Einleitung zu den *Grundlagen der Arithmetik* ist, wie mir scheint, im vollen Bewusstsein geschrieben, dass Philosophie und Mathematik diese Probleme bis anhin weitgehend verkannt haben. Von dieser Einschätzung auszunehmen ist freilich die Eins und der mit ihr verbundene Begriff der Einheit, in Bezug auf die auch Frege besondere Diskordanz ausmacht (*Grundlagen*, § 28). Aristoteles, und vielen nach ihm, galt allerdings die Eins, da sie als Prinzip der Zahlen aufgefasst wurde, nicht selbst als Zahl.

[2]R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888.

[3]Vgl. z. B. H. Amann, J. Escher, *Analysis*, Bd. 1, [2]2002, I.5 u. I.9-11 für die Details. Vgl. H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch e. a., *Zahlen*, [3]1992, Kap. 2 für einen Überblick über die verschiedenen Definitionen der reellen Zahlen.

[4]Dies ist eines der Probleme, das die Herausbildung der konstruktiven Mathematik befördert hat. Vgl. dazu A. S. Troelstra, D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, 1988.

[5]Vgl. M. Balaguer, ‚Fictionalism in the Philosophy of Mathematics', 2018 (SEP) für eine aktuelle Darstellung fiktionalistischer Positionen innerhalb der Philosophie der Mathematik. Diese Positionen werden in der Debatte um den Status mathematischer Gegenstände für gewöhnlich der anti-realistischen Seite zugerechnet. Obgleich den diversen anti-realistischen Positionen bisweilen nicht viel mehr gemeinsam ist als die Verneinung der Existenz abstrakter mathematischer Gegenstände, werden sie üblicherweise unter dem Banner des Nominalismus vereinigt. Für eine Übersicht über die verschiedenen neueren Spielarten des Nominalismus innerhalb der Philosophie der Mathematik, vgl. J. P. Burgess, G. A. Rosen, *A Subject With No Object*, 1997. Die Bezeichnung dieser Positionen als nominalistisch ist angesichts der Geschichte des Wortes allerdings ein wenig unglücklich. Nominalisten in diesem neueren Sinn verneinen nicht die Existenz universaler *Eigenschaften*, sondern die Existenz abstrakter *Gegenstände*.

[6]Vgl. H. Field, *A Science Without Numbers*, 1980 für einen Fiktionalismus, der die Unerlässlichkeit der Mathematik für die Naturwissenschaften bestreitet; vgl. Balaguer 2018 für andere Verteidigungsstrategien.

[7]Michael Detlefsen weist in seinem höchst aufschlussreichen Aufsatz über den Formalismus nach, dass seine verschiedenen Vertreter zu der Frage nach dem Wesen der Mathematik nicht einen, sondern vielmehr eine Familie miteinander verbundener Standpunkte eingenommen haben. Als das wohl prägendste Element der formalistischen Rahmentheorie nennt er die bereits bei Berkeley klar auszumachende Annahme, wonach der (Symbol-)Sprache im mathematischen Denken eine nicht-repräsentationale Rolle zukomme (M. Detlefsen, ‚Formalism', 2005, S. 237). Doch gerade Hilberts Formalismus entwickelte in diesem Punkt eine weitaus differenziertere Position, als hier dargelegt werden kann (vgl. hierfür Detlefsen 2005, S. 299-305).

[8]Im zweiten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* liefert Frege eine ausführliche Kritik des Formalismus, wie ihn sein Kollege in Jena, Carl Johannes Thomae, und vor ihm Eduard Heine vertraten (*Grundgesetze II*, §§ 86-137). Seine Kritik lässt sich nicht ohne Weiteres auf andere Spielarten des Formalismus ausweiten.

[9]Detlefsen argumentiert gegen die Annahme, dass Gödels Unvollständigkeitssätze (insbesondere der zweite) den Formalismus widerlegen (vgl. Detlefsen 2005, S. 309). Unbestritten ist jedoch, dass Gödels

Sätze historisch gesehen zersetzende Wirkung auf Hilberts Programm entfalteten. Für eine überblicksartige Diskussion gleichwohl offen gebliebener Auswege, vgl. R. Zach, ‚Hilbert's Prorgram', 2016 (SEP).

[10]Vgl. dazu der Reihe nach *Metaphysik* A, 987 b 14 – 18; Δ, 1020 a 7 – 11; A, 985 b 23 – 986 a 21; N, 1090 a 23.

[11]Vgl. Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1983, S. 241

[12]So zumindest geht die Geschichte, die uns Peter Geach überliefert hat (in G. E. M. Anscombe, P. T. Geach, *Three Philosophers*, 1961, S. 130).

[13]Hier denke ich der Reihe nach an die Intuitionisten, an Quines Doktrin der ontologischen Verpflichtung sowie an Carnap und Wittgenstein (in Bemerkung 4.1272 der *Logisch-philosophischen Abhandlung*). Für eine prägnante Gegenüberstellung von Quines und Carnaps Doktrinen in Bezug auf die Sinnhaftigkeit der Frage ‚Gibt es Zahlen?', vgl. W. V. O. Quine, ‚On Carnap's Views on Ontology', 1951.

[14]Benacerraf, ‚What Numbers Could not Be', 1965.

[15]Eines der Versprechen des logizistischen Programms war es, die Existenz der natürlichen Zahlen aufgrund logischer Prinzipien und Definitionen allein zu beweisen.

[16]Vgl. Dedekind 1888, § 6 und G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889, S. 1. Für eine vergleichende Diskussion ihrer Definitionen, vgl. Ebbinghaus e. a. 1992, S. 13-17.

[17]Aus Ebbinghaus e. a. 1992, S. 17. Die Nachfolgerrelation ist als injektive Funktion von $\mathbb{N}$ in sich selbst definiert, die in ihrem Bild die 0 nicht enthält und zudem folgende Bedingung erfüllt: Wenn eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ die 0 enthält und durch S in sich selbst abgebildet wird, dann ist $M = \mathbb{N}$ (S. 13).

[18]Vgl. die Diskussion zwischen Hilbert und Frege in Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, 1976.

[19]Vgl. den Einwand gegen Frege in Benacerraf 1965, S. 67 f.

[20]Vgl. Physik IV, 219 b 6f.; Thomas von Aquin, *De veritate*, q. 6, a. 4. Freilich wurde die von Aristoteles fast beiläufig getroffene Unterscheidung unterschiedlich gedeutet. Thomas scheint die Unterscheidung von Anzahlen, die Vielheiten konkreter Dinge zukommen, und Zahlen als abstrakten Gegenständen im Sinn zu haben.

[21]Vgl. *Grundlagen*, § 46.

[22]Vgl. dazu S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, 1967, S. 175.

[23]So lautete Freges Einwand gegen Edmund Husserl in seiner Rezension der *Philosophie der Arithmetik*, vgl. *Kleine Schriften*, 1990, S. 183 (319).

[24]Funktion wird hier eine rechtseindeutige Relation genannt. Injektiv wird eine Funktion genannt, wenn sie zudem linkseindeutig ist. Surjektiv (s. u.) wird eine Funktion genannt, wenn sie zudem rechtstotal ist, d. h. wenn jedes Element der Zielmenge (hier N bzw. A_n) ein Urbild unter der Funktion hat.

[25]Vgl. dazu die wunderbare Passage aus dem *Big Typescript* Wittgensteins (§ 118): «Was uns verführt die Russell'sche oder Frege'sche, Erklärung anzunehmen, ist der Gedanke, zwei Klassen von Gegenständen (Äpfeln in zwei Kisten) seien gleichzahlig, wenn man sie einander 1 zu 1 zuordnen *könne*. Man denkt sich die Zuordnung als eine Kontrolle der Gleichzahligkeit. Und hier macht man in Gedanken wohl noch eine Unterscheidung zwischen Zuordnung und Verbindung durch eine Relation; und zwar wird die Zuordnung zur Verbindung, was die „geometrische Gerade" zu einer wirklichen ist, eine Art idealer Verbindung; einer Verbindung, die quasi von der Logik vorgezeichnet ist und durch die Wirklichkeit nun nachgezogen werden kann. Es ist die Möglichkeit, aufgefasst als eine schattenhafte Wirklichkeit.»

[26]Frei adaptiert nach Bemerkung 5.232 der *Logisch-philosophischen Abhandlung.*

[27]Eine äquivalente Definition, die den trennenden, zugleich subtrahierenden und addierenden, Charakter des Zählens – das Abtrennen eines Elements aus der Menge der noch zu zählenden Gegenstände, das Hinzufügen in die Menge der bereits gezählten sowie die Sorge, die beiden Mengen klar voneinander

getrennt zu halten – hervorheben würde, wäre für beliebige $x, y \in \mathfrak{P}(m)$:
$x\dot{K}y :\Leftrightarrow \exists z(z \in m \setminus x \wedge y = x \cup \{z\})$.

[28]Dieses Prinzip gilt es von *Hume's Principle* oder HP, wie es in der Literatur bisweilen bezeichnet wird, zu unterscheiden. HP legt fest, dass die Anzahl Fs genau dann gleich der Anzahl Gs sei, wenn die Begriffe F und G gleichzahlig sind (vgl. G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, 1998, S. 171). Das Zuordnungsprinzip hingegen legt fest, dass zwei Begriffe genau dann gleichzahlig sind, wenn eine beiderseits eindeutige Zuordnung zwischen den unter sie fallenden Gegenständen besteht. Die oben besprochene Version des Zuordnungsprinzips bezog sich zwar auf Mengen, nicht auf Begriffe und deren Umfänge, da aber zuvor vereinbart worden war, dass immer die Annahme gelte, es sei ein geeigneter Begriff gewählt, dessen Umfang der betrachteten Menge entspreche, ist der wichtige Unterschied zwischen intensionaler und extensionaler Version des Prinzips für den Moment vernachlässigbar. In den *Grundlagen* definiert Frege die Gleichheit von Anzahlen übrigens *nicht* über die Gleichzahligkeit, was oftmals übersehen wird (vgl. dazu klärend M. Dummett, *Frege's Philosophy of Mathematics*, 1991, Kap. 10).

[29]Siehe R. Diestel, *Graph Theory*, 2005, Kap. 8.

[30]Siehe P. Mancosu, *Abstraction and Infinity*, 2016, Kap. 3.

[31]J. von Neumann, ‚Zur Einführung der transfiniten Zahlen', 1923. Von Neumann war 19 Jahre alt, als das Papier erschien. Bemerkenswert für uns ist, dass sein Vorschlag als Definition der Ordinalzahlen gedacht war.

[32]Vgl. dazu Ebbinghaus e. a. 1992, S. 303-5, 310. Von Neumanns Definitionenreihe hat auch den Vorteil, sich leicht ins Transfinite fortsetzen zu lassen:

$$\begin{aligned}&\omega := \{0, 1, 2, ...\},\ \omega + 1 := \omega \cup \{\omega\},\ \omega + 2 := (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\},\\ &...,\\ &\omega + \omega := \{1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}, ...\end{aligned}$$

[33]Siehe Anm. 19.

[34]Vgl. dazu Benacerraf 1965, S. 69 f.

[35]Um nur einen besonders problematischen Punkt aufzugreifen: Die Existenz von Automorphismen (d. h. von strukturerhaltenden Bijektionen einer Menge auf sich selbst) scheint die Existenz ununterscheidbarer Stellen in Strukturen zu implizieren, was zumindest einigen Strukturalisten Sorgen bereitet. Als Einstieg in die inzwischen kaum zu überschauende Debatte bietet sich S. Shapiro, ‚Identity, Indiscernibility, and *ante rem* Structuralism: The Tale of i and $-i$', 2008 an.

[36]Das ist in leicht angepasster Form Cantors Definition in seinen ‚Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre' von 1869.

[37]Vgl. z. B. Ebbinghaus e. a. 1992, Kap. 14.

[38]Was die Lehren daraus sein könnten, darüber werde ich in der Kolloquiumssitzung mehr sagen.

[39]Vgl. dazu das Urteil des späten Frege über seinen gescheiterten Versuch einer logischen Grundlegung der Arithmetik in *Nachgelassene Schriften*, 1983, S. 296.