Lizenziatsarbeit der Philosophischen Fakultät
der Universität Zürich

Über das Zählen

Philosophische Betrachtungen

bei Prof. Dr. Peter Schulthess

Romain Büchi

Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

I Wie sich zählen lässt

Ethnologisches

§ 1 Am Abend, bevor die Sonne untergeht, treibt der Hirte seine Schafe zusammen und bringt sie zu ihrem Schutz zurück in die Stallung. Um sicherzugehen, dass keines fehlt, lässt er jedes Schaf einzeln das Tor zum Stall passieren. Dabei hält er in der rechten Hand einen Stock, in den er bereits vor einiger Zeit für jedes Schaf, das er besitzt, eine Kerbe eingeritzt hat. An einem der beiden Enden beginnend, fährt er nun mit dem Daumen der rechten Hand über das Kerbholz. Für jedes Schaf, das in den Stall tritt, lässt er seinen Daumen zur nächsten Kerbe gleiten. Erreicht er mit dem letzten Schaf das andere Ende des Kerbholzes, hat er seine Arbeit gut getan. Bleiben dagegen unbetastete Kerben übrig, wird er sich notgedrungen auf die Suche nach den fehlenden Schafen machen.

§ 2 Man wird sich vielleicht fragen, ob der Hirte aus Langeweile sich ein solches Kerbholz zurechtgeschnitzt hat und darauf nicht nur die Zahl seiner Schafe, sondern auch andere Dinge, in kunstvollen Verzierungen und zu anderen Zwecken, festgehalten hat.[1] Denn er hätte sie einfach in Worten zählen und sich das zuletzt erreichte als das Zeichen ihrer Anzahl einprägen können; anstatt allabendlich mit seinem Daumen über die Kerben zu fahren, wäre sozusagen seine Seele der Zahlwortreihe entlang geglitten. Denkbar sind indes auch andere Beweggründe.

Der Wortschatz vieler australischer Sprachen umfasst tatsächlich nur wenige Elemente, die sich als Zahlwörter klassifizieren lassen;[2] so heisst es mitunter von der Sprache der Warlpiri, sie verfüge über nicht mehr als vier (unzusammengesetzte) Numeralia, die ihrer Bedeutung nach unseren Wörtern ‚eins', ‚zwei', ‚einige' und ‚viele' entsprechen.[3] Oft wird den Sprechern aufgrund solcher Befunde kurzerhand jegliches über die vermeintliche Grenze ihrer Zahlwortreihe hinausreichende Zählvermögen abgesprochen, und das obschon in der ethnographischen Literatur immer wieder nicht-verbale Methoden zur präzisen Ermittlung von Anzahlen beschrieben worden sind.[4] Ein gerade bei Ureinwohnern Australiens bis heute verbreitetes Vorgehen, um bestimmte Zahlangaben

[1] Für eine reiche Übersicht über verschiedene Arten von Kerbhölzern, ihre unterschiedlichen Verwendungen sowie Weiterentwicklungen zu Zahlnotationen sei auf Menninger (1958, Bd. 2, S. 26-55) verwiesen.
[2] Vgl. Bowern und Zentz (2012).
[3] Vgl. Hale (1975). Im Gegensatz zu Bowern und Zentz (2012) werden diese vier Wörter in Hale (1975) nicht als Numeralia, sondern als unbestimmte Determinantien klassifiziert, u. a. deshalb, weil sie beim Zählen nicht (oder zumindest nicht in ihrer paradigmatischen Anordnung) angewandt werden (vgl. Hale (1975, S. 295)).
[4] Vgl. Harris (1982).

zu machen, ist es, begleitet von erklärenden Worten Striche in den Sand zu ziehen;[5] auf Groote Eylandt konnte die Zuhilfenahme von Kieselsteinen beim Zählen beobachtet werden.[6] Ferner ist der Gebrauch von Kerbhölzern (sog. ‹message sticks›), anhand derer Nachrichten – z. B. die Zahl der zu einem bestimmten Anlass geladenen Gäste betreffend – überbracht wurden, spätestens seit Ende des vorletzten Jahrhunderts in der Literatur bezeugt.[7] Ähnliches wird auch aus anderen Weltgegenden berichtet. In dem für die Zahlzeichenkunde klassisch gewordenen Buch *Zahlwort und Ziffer* führt Menninger, freilich ohne seine Quelle preiszugeben, das Beispiel eines Verfahrens an, das er gliedweise Zuordnung nennt:[8]

> Auf Ceylon leben die Wedda, ein sehr tiefstehendes Naturvolk. Wenn ein Wedda Nüsse zählen soll, nimmt er einen Haufen Stäbchen. Einer Kokosnuss hängt er nicht ein Zahlwort an, sondern ein Stäbchen: eine Nuss – ein Stäbchen; dazu sagt er jedesmal: ‹das ist eins›. Soviel Nüsse, soviel Stäbchen; denn Zahlwörter hat er keine. Kann er deshalb nicht zählen? Doch. Er überträgt die vorgelegte Menge der Nüsse in die Hilfsmenge der Stäbchen. Kann er feststellen, ob ihm jemand eine Nuss gestohlen hat? Ja; er ordnet wieder gliedweise Nuss und Stäbchen zueinander, bleibt ein Stäbchen übrig, so fehlt eine Nuss. Kann er sagen, wieviel Nüsse er hat? Nein, denn er hat keine Wörter dafür; er muss den Haufen Stäbchen zeigen und sagen: ‹Soviel!›

Unser Hirte könnte also einer Gruppe von Menschen angehören, deren Sprache zwar für das Zählen einer Schafsherde nicht genügend Zahlwörter zur Verfügung stellt, die sich aber, wenn es ihnen nötig erscheint, sehr wohl mit Kerben, Strichen oder Stäbchen auszuhelfen wissen.

§ 3 Wahrscheinlicher ist, dass die Sprache unseres Hirten mehr Zahlwörter kennt, als dieser für das Zählen seiner Schafe jemals benötigen würde, dass aber in seiner Kultur das Zählen mit einem Tabu belegt ist; denn Zähltabus finden sich über den gesamten Erdball verteilt, in den unterschiedlichsten Kulturgebieten und zu allen Zeiten.[9] Zumeist betreffen sie das Zählen von Menschen, Tieren und Nahrung, bisweilen auch von Geld oder Zeiteinheiten; ein Tabubruch tritt als Ursache oder böses Vorzeichen auf, in deren

[5] Vgl. Roth (1897, S. 26), Strehlow (1944, S. 103), Harris (1982, S. 165).

[6] Vgl. Stokes (1982, S. 41).

[7] Vgl. Howitt (1889), Roth (1908, S. 97 f). Howitt berichtet, es werde nur bei geringer Zahl geladener Gäste für jeden einzelnen eine Kerbe in das Holz geritzt (vgl. S. 319).

[8] Menninger (1958, Bd. 1, S. 43). Die Behauptung, wonach die Sprache der Vedda keine Zahlwörter kennt, scheint keineswegs gesichert; vgl. hierzu Parker (1909, S. 85-9), Seligman und Seligmann (1911, S. 412) und Hartner (1943, S. 285). Vgl. ferner Hammarström (2010, S. 17-22) für eine Liste weiterer Sprachen, von denen in der Literatur behauptet wird, sie verfügten über keine Zahlwörter für Anzahlen über Eins.

[9] Vgl. für diese Feststellung und folgende Ausführungen Frazer (1918, S. 555-63), Seidenberg (1962, S. 14-7), Zaslavsky (1999, S. 52 f, 255 f). Es gilt vielleicht anzumerken, dass Frazer diesbezüglich von einer *aversion to count* und nicht von Tabus spricht, obschon er diesen Begriff an anderen Stellen gebraucht.

oder dessen Folge der Tod gezählter Lebewesen oder das Aufkommen von unbestimmtem Unheil erwartet wird. Nicht überall jedoch sind dieselben Handlungen betroffen. Mancherorts ist es lediglich untersagt, die genaue Anzahl einer Menge anzugeben, was verschiedene Wege, das Verbot zu umgehen, offenlässt. Danach gefragt, wieviele Schafe er besitzt, kann der Bewahrer eines solchen Tabus schlicht eine falsche – zur Sicherheit eine von der korrekten weit abweichende – Zahl angeben, um drohendes Unheil abzuwenden, oder er kann versuchen, den Fragenden mit einer ungefähren Angabe zufrieden zu stellen; sollte er jedoch die genaue Anzahl kundtun wollen, würde er vielleicht, in der Hoffnung sein Gegenüber erblicke die Absicht dahinter, das nächstkleinere Zahlwort nennen oder, wie es die kenianischen Kikuyu[10] tun, ein eigens hierzu eingesetztes Wort – bestehend aus einem jeweils in bestimmtem Abstand zum verbotenen liegenden Zahlwort und einem den besonderen Gebrauch markierenden Zusatz – verwenden.

Andernorts ist dagegen das Zählen entlang der üblichen Zahlwortreihe untersagt; da kann sich der geschilderte Gebrauch eines entsprechend präparierten Kerbholzes, sofern nicht als Zählen aufgefasst, als durchaus nützlicher Ausweg erweisen, um trotz Verbot die nötigen Überprüfungen vorzunehmen. Könnte nicht ebenso das Zählen mit den Fingern oder das in Papua-Neuguinea verbreitete *body-counting*[11] aus dem Bestreben heraus, ein ‹tabu on vocal counting› zu umgehen, entstanden sein?[12] Wo solche Auswege, aus welchen Gründen auch immer, versperrt sind, haben die Menschen andere Fähigkeiten entwickelt, die es ihnen erlauben, bei eigentlich unüberschaubar grossen Mengen das Fehlen eines Individuums zu registrieren; so etwa die Kikuyu: «A Kikuyu boy is given a rigorous training in animal recognition. As a test, two or three herds are mixed, and he is expected to select the animals belonging to his own family. Or several animals are hidden, and the child is asked to inspect the herd and report the missing members. If he makes an error, his tutor asks him to point out that specific animal in the herd.»[13] Mit der Fähigkeit, die richtigen Tiere auszuwählen und von anderen in der Umgebung abzusondern, sollte auch unser Hirte ausgestattet sein; dank des speziellen Verfahrens, das er anwendet, muss jedoch nicht jedes seiner Schafe für sich selbst Träger eines Bündels von mit blossem Auge erkennbaren Merkmalen sein, durch das es gegenüber allen anderen Tieren aus der Gruppe ausgezeichnet ist.

---

[10] Vgl. Githuku (2001, S. 115).

[11] Vgl. Owens (2001).

[12] Dies zumindest wird in Seidenberg (1960, S. 270) als These aufgestellt.

[13] Zaslavsky (1999, S. 255). Vergleichbare Fähigkeiten in Bezug auf ihre Hunde wurden den südamerikanischen Abiponen zugeschrieben, von denen es bei Menninger weiter heisst, sie hätten selbst nur drei Zahlwörter und zeigten «den grössten Widerstand, von dem Weissen eine Zählreihe zu lernen» (Menninger (1958, Bd. 1, S. 21)).

§ 4 Gerne würde man nun den Hirten fragen, warum er denn glaube, dass der Tod seine Tiere ereilen würde, wenn er sie zählte, und dass bei Gebrauch des Kerbholzes dagegen kein solches Unheil drohe. Frazer scheint sich für diese Fragen nicht sonderlich zu interessieren. Zwar geben manche der Quellen, die er in *Folk-lore in the Old Testament* für sich sprechen lässt, erste Ansätze von Begründungen; so berichtet eine darunter von der Furcht der afrikanischen Bakongo, böse Geister könnten das Zählen hören und ihr unheilvolles Auge auf die gezählten Dinge richten, während in Europa anderen Quellen zufolge Waldfrauen und Feen das (ungleich geringere) Unheil anrichten. Insgesamt aber hält Frazer die Zählverbote schlicht für merkwürdigen Aberglauben.[14] Und gewiss, nicht jedes Glauben ist zugleich ein Meinen. Die Frage nach dem Warum darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass Menschen oft etwas glauben, ohne dafür eine Begründung bereitzuhalten oder auch nur das Bedürfnis nach einer solchen zu verspüren. Gerade die Spärlichkeit und unfertige Gestalt der erwähnten Ansätze spricht dafür, sie als Verlegenheitsantworten zu betrachten. Das lässt sich noch deutlicher daran erkennen, dass die Bewahrer des Tabus ihre damit verbundenen Anschauungen auch dann nicht aufgeben, wenn begründete Zweifel geäussert oder berechtigte Anliegen vorgebracht werden.[15] Denn sie unterlassen nicht aus Überzeugung, sondern aus Gewohnheit; eingewurzelte Gewohnheiten aber lassen sich dem Boden, dem sie entwachsen sind, nur schwer entreissen.

Indem Frazer die Zählverbote als auf schierem Aberglauben beruhende Dummheiten[16] hinstellt, tut er im Grunde nichts anderes, als lediglich *seine* Aversion gegenüber etwas, das im Widerspruch zu seiner eigenen Weltsicht steht, kundzutun.[17] Das Erstaunliche an seiner Auflistung von Zählverboten lässt er damit gänzlich unberührt: das offenbar weltweite Vorkommen verblüffend ähnlicher Verbote und Anschauungen. Eine Bemerkung Wittgensteins über ein anderes Buch Frazers trifft hier gleichermassen zu:[18]

> ‹Und so deutet das Chor auf ein geheimes Gesetz› möchte man zu der Frazer'schen Tatsachensammlung sagen. Dieses Gesetz, diese Idee, kann ich nun durch eine Entwicklungshypothese darstellen

[14] Vgl. Frazer (1918, S. 556, 563).

[15] Diese Beharrlichkeit hat besonders in Afrika offenbar wiederholt zu Auseinandersetzungen mit den kolonialen Verwaltern geführt (vgl. Frazer (1918, S. 556, 558), Zaslavsky (1999, S. 53)). Im präkolonialen Afrika dagegen wurden Zählungen, die für das Erheben von Steuern unabdingbar sind, indirekt durchgeführt. Im Königreich Dahomé mussten die Einwohner für jedes Stück Vieh, das sie besassen, eine Kaurimuschel abgeben; die Muscheln wurden dann anstelle des Viehs gezählt (vgl. Zaslavsky (1999, S. 52 f)).

[16] Wittgensteins Urteil, wonach Frazer «alle diese Gebräuche endlich so zu sagen als Dummheiten» darstelle, ist auch hier zutreffend (vgl. *BF*, S. 235). Die Bewahrer von Zählverboten spricht Frazer als ‹ignorant people› an; das häufige Vorkommen solcher Verbote ‹among the black races of Africa› scheint sich da nur zu gut ins Bild einzufügen (vgl. Frazer (1918, S. 556)).

[17] Vgl. Schulte (1990, S. 43).

[18] *BF*, S. 241.

> oder auch, analog dem Schema einer Pflanze, durch das Schema einer religiösen Zeremonie, oder aber durch die Gruppierung des Tatsachenmaterials allein, in einer ‚*übersichtlichen*' Darstellung.

Unübersichtlich ist Frazers Auflistung freilich nicht; immerhin macht er regen Gebrauch von Marginalia. Trotzdem ist ihre Übersichtlichkeit keine im Sinne Wittgensteins, da sie es versäumt, die aufgelisteten Verbote zusammen mit anderen Bräuchen und Anschauungen in ein allgemeines Bild zu fassen, an dem wesentliche Zusammenhänge sichtbar würden – ein Bild, das sie nicht als Dummheiten oder nachweisliche Irrtümer hinstellt, sondern als nachvollziehbare Gebräuche erweist. Gerade die abergläubischsten Anschauungen, die gleich toten Metaphern als entzauberte Rückstände einst lebendiger Rituale in Gebrauch geblieben sind, bedürften einer solchen Umstellung.

In ‚The ritual origin of counting' unternimmt Seidenberg den Versuch einer Umstellung, indes nicht durch eine ‹Gruppierung des Tatsachenmaterials› in einer übersichtlichen Darstellung, wie sie vielleicht Wittgenstein vorschwebte, sondern, um in seiner Redeweise zu bleiben, durch eine Entwicklungshypothese über den Ursprung des Zählens überhaupt: «Counting was invented in a civilized center, in elaboration of the Creation ritual, as a means of calling participants in ritual onto the ritual scene, once and only once, and thence diffused.»[19] Das ursprüngliche Schöpfungsritual skizziert Seidenberg in groben Zügen als eine um Tod und Wiedergeburt kreisende Abfolge ritueller Handlungen, an deren Anfang die nacheinander erfolgende Anrufung je zweier Teilnehmer bei ihrem Namen und deren paarweise Prozession stehen. Die daraus hervorgehende Namenreihe deutet er als das erste Zählwortsystem überhaupt; wo diese „Zählnamen" im Verlauf von Säkularisierungsprozessen ihre alte Bedeutung verloren, den rituellen Gebrauch jedoch beibehalten haben, erfolgt die Anrufung der Teilnehmer demnach durch Zählen. In seiner archaischen Ausprägung enthalte das Schöpfungsritual als zentrales Moment die Opferung des ersten Teilnehmerpaares, d. i. eines Mannes und einer Frau (‹the divine King and Queen›); die daran anschliessenden Anrufungen, sofern solche erfolgen, seien als Wiederholungen dieses ersten, makabren Aktes zu verstehen, bei denen nicht noch einmal dieselben Namen, sondern Zusammensetzungen aus den ersten beiden gebraucht würden.[20] Um nun in der Fortsetzung des Rituals weitere menschliche Opfer zu vermei-

[19] Seidenberg (1962, S. 37). Vgl. für die folgenden Ausführungen zudem S. 10 f und 21-3.

[20] Als Indiz hierfür wertet Seidenberg das periphere Vorkommen von Zahlwortsystemen auf Zweierbasis; in solchen Systemen wird das dritte Glied aus einem Vorkommnis des ersten und einem Vorkommnis des zweiten gebildet, das vierte aus zwei Vorkommnissen des zweiten, usw. (vgl. auch Seidenberg (1960, S. 216, 219-25)). Die Bestimmung der Basis richtet sich danach, dass bereits nach der zweiten Stelle in der Zeichenreihe ein Wechsel im Zeichenbildungsprinzip stattfindet: Das dritte Zahlwort wird nicht als weiteres Grundzeichen eingeführt, sondern aus den beiden bereits vorhandenen gebildet. Der zugrundeliegende Basisbegriff ist somit ein rein syntaktischer (vgl. hierzu Büchi (2011, S. 127-33)).

den, erhält jeder weitere Teilnehmer einen Gegenstand (ein Tier, ein Geldstück, einen Stein o. dgl.) zugeordnet, der sodann an seiner Stelle angerufen und geopfert wird.

An dem Bild, das Seidenberg entwirft, lässt sich nachvollziehen, wie das Aufsagen der Zählwörter ihrer Reihe nach – das Zählen also – in einer Gesellschaft, zu deren lebendigem Brauchtum Rituale dieser Art gehörten, als letale Gefahr für die gezählten Lebewesen angesehen werden konnte. Das Interessante daran – und darin stimme ich mit Wittgenstein[21] überein – ist nicht, ob das entworfene Bild den historischen Begebenheiten entspricht, d. h. ob das Zählen tatsächlich aus einem solchen Schöpfungsritual hervorgegangen ist, sondern ob es daraus hervorgegangen sein könnte. So besehen lässt sich sagen, dass ihm das Bild insgesamt wohl gelungen ist, obgleich an den Rändern Einiges noch seltsam anmutet. Unbeleuchtet bleiben insbesondere jene Anschauungen, die das Ersetzen des Menschenopfers durch eine andere, stellvertretende Opfergabe bedingen; es sind dieselben Anschauungen, die auch der Möglichkeit zugrundeliegen, das Zähltabu durch den stellvertretenden Gebrauch eines Kerbholzes zu umgehen.[22]

Die Regeln des Zählens

§ 5 Wo das Zählen von Vieh mit einem Tabu belegt ist, kann das Verhalten unseres Hirten nur geduldet werden, wenn es nicht als ein Zählen von Schafen aufgefasst wird. Wie aber liesse sich diese Auffassung begründen? Eine Möglichkeit bestünde darin zuzugeben, dass er zählt, dem jedoch anzufügen, er zähle nicht seine Schafe, sondern an deren Stelle die Kerben an seinem Stock. In der Schilderung seines Handelns (gemäss § 1) ist eine Zählung der Kerben indes nirgends angedeutet; und es besteht auch kein Grund zu der Annahme, das Unterfangen, welches er verfolgt, würde dies erfordern. Eine andere Antwort, die ohne diese Annahme auskommt, wäre es darauf hinzuweisen, dass der Hirte bei seinem Tun keine Zahlwörter in den Mund nimmt, und zugleich daran zu erinnern, dass Seidenbergs Bild die Quelle der Gefahr in einem Missverständnis verortet: Das Aufsagen der üblichen Zahlwörter beim Zählen von Lebewesen könnte entgegen der Absicht des Zählenden als deren Anrufung auf die Bühne eines blutigen Rituals verstanden werden. Wer dagegen den gesprochenen Gebrauch dieser Wörter vermeidet, müsste nicht um seine Tiere fürchten. Diese zweite Antwort mag jene befriedigen, die auf der Suche nach einem Weg um das Tabu herum sind, auf den Zählbegriff jedoch wirkt sie entsprechend einengend; weder stummes Zählen – das Gleiten der Seele entlang der Zahl-

[21] Vgl. *BF*, S. 252. Wittgenstein sagt (auf S. 242) auch, er könne die Entwicklungshypothese «als weiter nichts sehen, als eine Einkleidung eines formalen Zusammenhangs.»

[22] In ihrem Bericht über das Königreich Dahomé (siehe Anm. 15) erwähnt Zaslavsky den Brauch, wonach jedes Tier, für das eine Kaurimuschel abgegeben wurde, zuerst mit dieser Muschel in Berührung gebracht werden solle, um die Gefahr auf sie zu übertragen.

wortreihe – noch das Zählen entlang anderer Wortreihen würden als Arten des Zählens zugelassen. Aus dem algerischen Oran ist indes ein Zählritual überliefert, bei dem das Korn nur durch eine im Zustand zeremonieller Reinheit befindliche Person und ohne direkten Rückgriff auf die üblichen Zahlwörter abgezählt wird: «elle s'exprime ainsi: *bismi Lllâh* (au nom de Dieu), pour ‚un'; *barkateïn* (deux bénédictions), pour ‚deux'; *d'eïfat en nabi* (hospitalité du Prophète, c'est-à-dire de 3 jours), pour ‚trois'; *nerbah'ou**, *in châ' Allâh* (nous gagnerons, s'il plaît à Dieu), pour ‚quatre'; *fî 'aïn Iblîs* (dans l'œil† du Diable), pour ‚cinq'; *fî 'aïn ouldou* (dans l'œil de son fils), pour ‚six'; *ech cheb'a*‡ *men 'and Allâh* (c'est Dieu qui nous rassasie), pour ‚sept', etc. . . . jusqu'à ‚douze', pour lequel on dit: *el kemâl 'ala rebbi* (la perfection pour Dieu)».[23] Wird hier nicht gezählt?

Dennoch könnte man sich darauf versteifen, unter den Begriff des Zählens ausschliesslich Handlungen, bei denen die üblichen Zahlwörter ihrer Reihe nach zur Anwendung kommen, fallen zu lassen. Und zunächst liesse sich nichts dagegen einwenden: Klar kann dort die Grenze gezogen werden! Sie darf bloss nicht zu der Annahme verleiten, es entspreche ihr eine Beschränkung im gewöhnlichen Gebrauch des Wortes ‚zählen'. Denn dies anzunehmen wäre schlichtweg falsch. Von dem Bahnangestellten, der für jede Person, die den Waggon besteigt, einmal den Knopf eines kleinen mechanischen Geräts in seiner Hand betätigt, würden wir natürlich sagen, dass er diese Personen zählt – und zwar ungeachtet dessen, ob er dabei der Zahlwortreihe stumm entlang gleitet oder nicht; das Gerät, das ihm dabei behilflich ist, nennen wir denn auch für gewöhnlich einen Handzähler. Näher noch bei unserm Hirten bewegt sich der Kellner, der beim Aufnehmen von Bestellungen Strichlisten in seinen Notizblock zeichnet. Ist sein Handeln als ein notierendes Zählen nicht trefflichst beschrieben? Das Vorgehen des Hirten bei der Zubereitung seines Stocks wäre demnach wohl ein kerbendes Zählen – oder, wie es im Englischen heisst, ein *tallying* – zu nennen.

Ferner würde die künstlich beschränkte Auffassung dessen, was Zählen ist, leichtfertig von der Definition einer Wortart abhängig gemacht, zu deren wesentlichen Merkmalen es gehört, die Bezeichnung einer Zahl oder sonstigen Quantität zu sein.[24] Von philosophischem Interesse ist jedoch nicht der Weg, der von der Zahl über das Zahlwort zum Zählen führt, sondern der in die Gegenrichtung verlaufende. Aus diesem Grund konn-

[23] Doutté (1909, S.179 f). In der ersten und dritten Fussnote weist Doutté auf Alliterationen mit der Wurzel von ‚vier' (*raba'a*) bzw. von ‚sieben' (*saba'a*) hin; in der zweiten bemerkt er eine Anspielung auf die magischen Kräfte, die den fünf Fingern der Hand nachgesagt werden. Mindestens einige der Wörter, die hier zur Anwendung kommen, weisen also eine Verbindung zu den eigentlichen Zahlwörtern der Sprache auf. Das Beispiel ist auch in Frazers Auflistung erwähnt (vgl. Frazer (1918, S. 558)); andere Beispiele dieser Art finden sich im jüdischen Kulturkreis (vgl. Seidenberg (1962, S. 8, 20), Zaslavsky (1999, S. 52)).

[24] Vgl. Eintrag ‚Numerale' in Bussmann (2008).

te Weierstrass eine in die Arithmetik einführende Vorlesung mit den Worten beginnen: «Die Arithmetik hat keine andere Voraussetzung als den Begriff der Zahl. Was aber die Zahl ist, machen wir uns klar, indem wir uns vergegenwärtigen, was wir thun, wenn wir zählen»[25], und nicht umgekehrt: „Was aber das Zählen ist, machen wir uns klar, indem wir uns vergegenwärtigen, was Zahlen sind.“ Nicht die Zahl ist das zunächst Klarere, das Vertrautere, sondern das Zählen.

Wenn das Zählen ein Messen ist, bei dem gleichsam ein Massstab an die Wirklichkeit gelegt wird, liegt das, was es in seinem Wesen ausmacht, nicht zuerst in der materiellen Beschaffenheit des angewandten Massstabs, sondern in den Regeln seiner korrekten Anwendung. Es sind diese Regeln, welche dann die Vielfalt dessen, was als Massstab beim Zählen angewandt werden kann, eingrenzen. Das Beispiel aus Oran lehrt uns, dass nicht nur Zahlwörter als Zählwörter in Frage kommen, und das Hirtenbeispiel, dass es beim Zählen nicht zwingend der Worte bedarf. Ob etwas als Zählzeichen in Frage kommt, ist also weder durch die Medialität noch durch die Bedeutung oder die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Wortart bedingt; es zeigt sich darin, dass es beim Zählen angewandt werden kann. Jedoch folgt daraus, dass ein Werkzeug in bestimmter Weise und zu einem bestimmten Zweck angewandt werden kann, weder, dass es immer nur in dieser Weise Anwendung fand, noch dass es zu diesem Zweck entwickelt worden ist. Seidenberg stellt zu Recht die Frage: «[H]ow can one ask ‹How many?› until one knows how to count?»[26] Die funktionalistische „Erklärung“, wonach der beim Zählen zur Anwendung kommende Mechanismus erfunden worden sei, um das Bedürfnis von Hirten nach mehr Sicherheit zu befriedigen, halte ich deshalb für Unsinn. Es scheint mir vielmehr, als müsste dieser Mechanismus – mitsamt einer auch für Zählungen geeigneten Zeichenreihe – zu anderen (z. B. rituellen) Zwecken schon in Gebrauch gewesen sein, ehe er sich dann – vielleicht bei sanfter Anpassung der alten Anwendungsregeln – als einer neuen Anwendung und neuen Zwecken zugänglich erwies.

§ 6 Die Schilderung des Hirtenbeispiels stellt jenes an das Eintreten der Schafe in den Stall eng gekoppelte Gleitenlassen des Daumens entlang des Zählstocks klar in den Vordergrund; gleichwohl sind drei weitere Handlungen erwähnt: das Zusammentreiben der Schafe, das Kerben des Stocks und die (allfällige) Suche nach den fehlenden Schafen. Alle vier hängen offenbar miteinander zusammen. Der geschilderte Gebrauch des Stocks setzt einerseits dessen Kerbung voraus, andererseits – und in einem anderen Sinne – erfordert er eine versammelte Schafsherde, an der die Zählung durchgeführt werden kann;

[25] Mittag-Leffler (1920, S. 157).
[26] Seidenberg (1962, S. 2).

das Ergebnis der Zählung wiederum bestimmt, ob nach fehlenden Schafen gesucht wird oder nicht. Es wird sich, um den Zusammenhang ganzheitlich darzustellen, als dienlich erweisen, zuerst das Kerben des Stocks zu betrachten; auf die anderen Handlungen wird sich erst im zweiten Abschnitt eingehen lassen.

Mit dem Kerben des Stocks schnitzt sich der Hirte – um das Bild vom Zählen als einem Messen wieder aufzunehmen – einen Massstab zurecht; damit der einst seinen Zweck erfüllen kann, hat dies nach bestimmten Regeln zu erfolgen. Wer sich gewohnt ist, so zu zählen, wie wir das üblicherweise tun, würde nicht lange zögern und ihm dies anraten: „Ritze für jedes Schaf, das du besitzt, und für kein anderes eine und nur eine, je eigene Kerbe in deinen künftigen Zählstock." In ihre Einzelteile zerlegt lautet die Vorschrift:

(1) Für jedes Schaf, das du besitzt, sollst du eine Kerbe einritzen;
(2) für kein Schaf, das du nicht besitzt, darfst du eine Kerbe einritzen;
(3) für kein Schaf darfst du mehr als eine Kerbe einritzen; und
(4) für keine zwei Schafe darfst du ein und dieselbe Kerbe einritzen.

Hat sich der Hirte an diese Regeln gehalten, wird er einen Stock hervorgebracht haben, in den gleich viele Kerben geritzt sind, wie seine Herde Schafe zählt. Um nach der Geburt eines Lamms die Übereinstimmung wiederherzustellen, muss er lediglich eine weitere Kerbe in den Stock ritzen; verendet dagegen ein Tier, wird er vielleicht versuchen, eine abzutragen.[27] Diese bei Bedarf stets aufs Neue wiederhergestellte Übereinstimmung wird es ihm ermöglichen, in Zukunft nachzuprüfen, ob die gerade vor ihm versammelte Herde weniger, mehr oder gleich viele Schafe zählt wie nach der letzten Prüfung.

Leichthin liesse sich jetzt sagen, unser Hirte gebrauche den dann fertigen Stock als Massstab, um die Herde zu messen; darüber könnte aber fast vergessen gehen, dass er ihn allein auf seine Herde (oder auf Teile davon) anwendet und nicht, wie es für einen Massstab üblich ist, als allgemeinen Standard, an dem verschiedene Grössen derselben Art gemessen werden. Vorsichtiger wäre es daher lediglich zu sagen, er habe sich ein Bild *seiner* Herde geschnitzt – nicht ein ganzheitliches, das sie in ihrer ganzen Vielfalt erfasst, sondern ein beschränktes, das nur einen bestimmten Zug hervortreten lässt, indem es mit ihr diesen einen Zug gemeinsam hat. Diesen teilt sich das Kerbholz natürlich nicht nur mit der Herde des Hirten, sondern mit allerlei Horden, Rotten und Scharen von Dingen; unzählige andere Ansammlungen jedoch weisen gerade diesen Zug nicht auf, und auf jene

[27] Vgl. Menninger (1958, Bd. 2, S. 31 f) über das Abkerben.

letzteren lässt sich das Kerbholz deswegen nicht in derselben Weise anwenden. Ähnliches findet sich in Goodsteins Text über das Zählen ausgedrückt, wo es heisst: «The tally stick shows not only the flock, but also all the individual parts which make up the flock», was ihn, den Kerbstock, gleich einer Kopie der Herde erscheinen lasse.[28] Wir können uns hier damit begnügen, jenen geteilten Zug – ohne viel darin hineinlegen zu wollen – unter einen naiven Begriff der Anzahl zu stellen.

Indem er seinen Daumen wie in § 1 geschildert dem Stock entlang gleiten lässt, prüft unser Hirte also, ob die Viehansammlung vor dem Stall dieselbe Anzahl aufweist wie die Kerbfolge, die er abtastet; stimmt das Bild mit der Ansammlung überein, wird er daraus schliessen, dass sich nach der Zählung gleich viele Tiere im Stall befinden, wie seine Herde zuletzt Schafe gezählt hat. Zulässig sind solche Rückschlüsse indes nur, wenn die Überprüfung nach Regeln erfolgt, die denen der Kerbung entsprechen; dabei wird auch die Form des eingeritzten Kerbmusters zu berücksichtigen sein. Das Muster auf dem Stock des Hirten hat, wie aus der Schilderung seines Gebrauchs hervorgeht, zwei Enden; dazwischen steht jede Kerbe zu genau zwei anderen in unmittelbarer Nachbarschaft. Sobald sich der Hirte dafür entschieden hat, eine der beiden äusseren Kerben als die erste anzutasten, ist zudem eine Richtung festgelegt, der entlang jede Kerbe, ausser der letzten, ihre eindeutige Nachfolgerin hat; das Merkmal fehlender Nachfolge gibt schliesslich ein Kriterium zur Beendigung des Vorgangs vor. Die Überprüfung wird sich demnach aus drei nacheinander auszuführenden Handlungen zusammensetzen:

(1*) Wähle aus den beiden äusseren Kerben die Anfangskerbe und setze den Daumen dort an;

(2*) lasse für jedes Schaf, das in den Stall tritt, den Daumen zur nächstfolgenden Kerbe gleiten; und

(3*) beende die Zählung, sobald die letzte Kerbe erreicht ist oder alle Schafe im Stall sind.

Den vier Regeln der Kerbung entspricht hier die mittlere Handlung, bei deren Ausführung der Hirte bemüht sein wird, immer nur ein einzelnes Schaf das Tor zum Stall passieren und dabei seinen Daumen immer nur bis zur nächsten Kerbe weiter gleiten zu lassen; die beiden umrahmenden Punkte dagegen geben ihre Anfangs- und Terminationsbedingungen an.

§ 7 Unser Hirte muss die Kerben auf seinem Stock nach demselben allgemeinen Prinzip angelegt haben, das auch bei der Bildung von Strichfolgen zur Anwendung kommt.

[28] Goodstein (1956, S. 117).

Ausgehend von dem Grundzeichen | werden durch wiederholtes Anfügen eines weiteren Vorkommnisses des Grundzeichens alle Strichfolgen ihrer Reihe nach gebildet:

$$| \hookrightarrow ||; \quad || \hookrightarrow |||; \quad ||| \hookrightarrow ||||; \quad \ldots$$

Demselben Zweck hätte freilich manch andere, nicht-lineare (d. h. nicht entlang einer ununterbrochenen Geraden verlaufende) Anordnung ebenso gut gedient;[29] dass aber überhaupt solche Ordnung im komplexen Zählzeichen herrscht, erlaubt es dem Benutzer des Kerbstocks sorgloser zu zählen als dies etwa einem Vedda (siehe § 2) gestattet ist, der mit einer ungeordneten Hilfsmenge vorliebnehmen muss. Denn die kettenförmige und nach zwei Seiten offene Anordnung der Kerben auf dem Stock übernimmt bei adäquater Anwendung einen beträchtlichen Teil der Arbeit. Zählte unser Hirte seine Schafe nicht mit dem Kerbstock, sondern anhand von Muscheln, die er zuvor in einem der Kerbung entsprechenden Vorgang zu einem losen Haufen bereitgestellt hätte, müsste er beim Zählen stets darauf achten, den Haufen der noch unverbrauchten klar von den bereits einmal für ein Schaf in die Hand genommenen Muscheln zu trennen. Mit dem Kerbstock dagegen muss er lediglich eine der beiden Kerben, die sich ihm geradezu anbieten, als die erste antasten und den Daumen danach stets in dieselbe Richtung gleiten lassen. Wo die Grundzeichenvorkommnisse in keiner vorgegebenen Ordnung zueinander stehen, ist es nicht sinnvoll von Enden, Richtungen oder Nachfolgern zu sprechen. Erst die starre Befolgung des obigen Prinzips bei der Zeichenbildung hebt also das Kerbmuster von dem Stäbchenbündel, dem Kieselsteinhaufen oder der Kaurimuschelsammlung ab und macht es zum geschriebenen und alsdann lesbaren Zählzeichen. Daran lässt sich indes erkennen, dass für das Zählen – sofern das Verfahren der Vedda und damit verwandte Handlungsweisen als Zählen aufgefasst werden sollen – auch Zeichen ohne innere Ordnung hinreichen.

Goodstein anerkennt die allgemeine Zeichenhaftigkeit von Kerbmustern, wenn er über das Kerben sagt: «making a tally consists only in regarding a group as a number sign»[30]; da er aber den Einsatz von Hilfsmengen nur im Zusammenhang mit Abaki behandelt, wo also durch die aneinandergereihten Drähte, an denen die einzelnen Steine hängen, eine positionale Ordnung vorgegeben ist, bleibt der Unterschied zwischen einer ungeordneten Hilfsmenge und einem Kerbmuster, wie es unser Hirte anlegt, unbeachtet. Dadurch scheint ihm überdies auch der Blick auf die Konventionalität der Strichnotation versperrt zu bleiben, zumal er im Anschluss an den eben zitierten Satz behauptet: «and counting consists in transforming a group, regarded as a number sign, into a conventional

[29]Vgl. Büchi (2011, S. 120) für Beispiele nicht-linearer Strichfolgen.
[30]Goodstein (1956, S. 124).

numeral.» Das Kerben begreift Goodstein als einen Kopiervorgang, bei dem zwar das Zeichen einer Zahl, aber kein konventionelles Zahlzeichen erzeugt wird; als blosse Kopie der betrachteten Ansammlung fehlt dem erzeugten Zeichen jene Konventionalität, die aus Zahlzeichen Zählzeichen macht; erst die Umwandlung des Kerbmusters in ein konventionelles Zahlzeichen wie 123 vervollständigt demnach den Vorgang zu einer Zählung. Offensichtlich jedoch ist ein Kerbmuster, wie es unser Hirte anlegt, wesentlich mehr als die blosse Kopie eines ungeordneten Haufens; wenn überhaupt, ist es die Kopie einer in Reih und Glied aufgestellten Schafsformation.

Da wir uns gewohnt sind, beim Zählen eine vorgegebene Zeichenreihe emporzusteigen, auf dem Stock unseres Hirten aber offenbar nur ein einziges – wenn auch komplexes – Zeichen vorhanden ist, liegt der Standpunkt nahe, bei seinem allabendlichen Ritual könne es sich unmöglich um Zählen handeln. Dieser Standpunkt verkennt jedoch einen charakteristischen Zug der Strichnotation. Um diesen leichter zu fassen, lohnt es sich die bei der Betrachtung von Zählzeichensystemen ohnehin angezeigte Unterscheidung verschiedener Ordnungsebenen, einer syntagmatischen und einer paradigmatischen, heranzuziehen: Zur ersten Ebene gehören die Beziehungen zwischen Zeichen, die im selben Komplex vorkommen – im vorliegenden Fall unter anderem die Anordnung der einzelnen Striche in der Strichfolge – und zur zweiten jene zwischen vollwertigen Zeichen des Systems, d. i. die Anordnung der Strichfolgen in der Reihe der Zählzeichen. Wie die syntagmatische leitet sich auch die paradigmatische Ordnung der Strichnotation aus ihrem Bildungsprinzip ab. Ausgehend von dem Startzeichen | induziert der zu Beginn des Paragraphen dargestellte Zeichenbildungsprozess auf der Menge der erzeugten Strichfolgen eine streng lineare Ordnung, worin jede Strichfolge durch ihr Verhältnis zum Startzeichen – wir werden sagen: durch ihren Rang – eindeutig bestimmt ist.[31]

Charakteristischerweise enthält eine Strichfolge jede ihrer Vorläuferinnen in der paradigmatischen Ordnung als Teilfolge; so sind z. B. in ||||| die Zeichen ||||, |||, || und | enthalten. In der syntagmatischen Ordnung der Strichfolge widerspiegelt sich also ihr Platz innerhalb der paradigmatischen Reihe auf besonders ausführliche Weise; ihr Rang liegt in ihrem inneren Aufbau vollständig artikuliert da. Ein konventionelles Zahlzeichen – im Sinne Goodsteins – dagegen verschluckt einen Teil dieser Struktur; es gleicht in dieser Hinsicht eher einem Namen, wie er meint.[32] In der Tat lässt der innere Aufbau der

[31] Unter einer streng linearen Ordnung wird hier eine asymmetrische, transitive und konnexe (zweistellige) Relation verstanden, wobei eine Relation R asymmetrisch heisst, falls für alle x und y in ihrem Bereich gilt: $xRy \to \neg yRx$; transitiv, falls für alle x, y und z gilt: $xRy \wedge yRz \to xRz$; und konnex (vollständig, total), falls für alle x und y gilt: $x \neq y \to xRy \vee yRx$. In streng linearen Ordnungen folgt die Eindeutigkeit des Startzeichens bereits aus dessen Existenz.

[32] Vgl. Goodstein (1956, S. 117, 120).

Ziffer 3 nicht auf ihren Rang im indisch-arabischen Notationssystem schliessen; wer es benutzen will, muss sich den Rang der ersten neun Ziffern eingeprägt haben. Für Zählungen in die höheren Ränge wäre ein System, das aus einer rein konventionell festgelegten Reihe von eigenständigen, nicht auseinander zusammengestellten Namen bestünde, aber offensichtlich ungeeignet; gerade das indisch-arabische System verdankt seine Effektivität dem Umstand, dass der Rang auch grösserer Zeichen an der positionalen Anordnung der zehn Grundziffern rasch zu erkennen ist.[33] Obgleich in einem Ziffernkomplex nicht alle seine Vorgänger offen da liegen, ist die paradigmatische Struktur, die ihn vom Startzeichen trennt, nicht vollständig verborgen, sondern sozusagen in Zehnerblöcke zusammengefaltet;[34] an dem inneren Aufbau von 123 z. B. ist zu erkennen, dass sich die Menge seiner Vorgänger in einen Block der zweiten, zwei der ersten und drei der nullten Stufe zerteilen lässt.

Wenn unser Hirte also mit dem Daumen über die Kerben auf seinem Stock fährt, steigt er die paradigmatische Reihe der Strichfolgen empor; das in jedem Zählschritt bereits zurückgelegte, d. h. abgetastete, Segment der Kerbfolge zeigt den bis dahin erreichten Zeichenrang an. Schon bei der Kerbung sorgte diese Eigenheit der Strichnotation dafür, dass der Hirte die eingekerbten Zeichen beim Fortschreiten nicht – wie das bei der Anwendung der indisch-arabischen Notation erforderlich gewesen wäre – wieder abtragen musste. Goodstein hat diesen Unterschied im Sinn, wenn er behauptet: «The essential difference between making a tally [...], and counting [...] is the difference between longhand and shorthand (almost the difference between travelling and arriving).»[35] Beim Kerben bleiben die Spuren der ganzen Reise erhalten, beim Zählen mit unserem Ziffernsystem dagegen werden sie in jedem neuerlichen Zählschritt weitgehend verwischt, sodass letztlich das erreichte Zählzeichen, und mithin nicht jeder Vorgänger mit ihm, stehen bleibt. So passend Goodsteins Bilder auf den ersten Blick erscheinen mögen, sie alle zeigen einen kategorischen Graben, wo in Wahrheit ein bloss gradueller Abstand trennt. Beim Zählen mit dem Ziffernsystem werden die Spuren nur *weitgehend* verwischt; wenn der Zählende, beim zehnten Gegenstand angekommen, kein neues Grundzeichen notiert, sondern sich des zweiten Bildungsprinzips bedient und die neue Position mit einem bereits überschrittenen Grundzeichen besetzt, dann zeichnet er in Kurzform den gegangenen Weg auf; das geschieht bei jedem Übergang zur nächsthöheren Ordnungs-

[33] In meiner Arbeit zu Zählnotationen äusserte ich die Vermutung, die vielbeschworene Überlegenheit unseres Dezimalsystems beruhe auf der optimalen Kombination einer vergleichsweise umfangreichen Menge an Grundzeichen mit der semiotischen Aktivierung positionaler Relationen (vgl. Büchi (2011, S. 133)).

[34] Vgl. hierzu Büchi (2011, S. 128 f), insbes. Abb. 4.

[35] Goodstein (1956, S. 117).

stufe aufs Neue. Jenen Graben, den er zu erblicken vermeint – er spricht ja von einer ‹frontier›[36], die das Kerben vom Zählen trennen soll –, erachte ich daher, so kunstvoll ineinander verflochten die Betrachtungen, die ihn dazu bringen, auch sein mögen, für künstlich angelegt.

Ferner sehe ich keinen anderen Grund, die Grenze dessen, was noch unter den Zählbegriff fallen soll, hier schon zu ziehen; wir werden deshalb die kerbende wie auch die überprüfende Tätigkeit unseres Hirten ein Zählen und die dabei erzeugten und angewandten Zeichen Zählzeichen nennen. Diese Vorgehensweise wirft indes sogleich die Frage nach den Propria von Zählzeichensystemen auf. Die Leserschaft wird sich mit der bescheidenen Antwort begnügen müssen, dass sie beim Zählen angewandt werden können; d. h., die vorliegende Arbeit wird eine andere Richtung einschlagen als jene, in die uns die Suche nach einer befriedigenden Antwort auf die Frage führen würde. (Es scheint einstweilen so, als wäre eine streng lineare Ordnung mit Startelement erforderlich; um jedoch darüber Gewissheit zu erlangen, müsste zuerst die Frage entschieden werden, ob sich unter Anwendung von anders strukturierten Systemen nicht vergleichbare Ergebnisse erzielen lassen.) Wir werden daher im noch vor uns liegenden Teil der Arbeit ohne weiteres annehmen, dass es sich bei den bekannten numerischen Notationen und Zahlwortreihen um Zählzeichensysteme handelt.

Zählen als Zuordnen

§ 8 Vom gegenwärtigen Standpunkt aus erscheint die Anwendung wie auch immer gearteter Zeichen erforderlich für das Zählen; jedenfalls ist er allen bis anhin betrachteten Handlungsweisen gemeinsam. Es findet sich indes bei Kleene – zu Beginn des mit ‚Countable sets‘ überschriebenen Paragraphen, der das Kapitel über die Grundlagen der Mathematik in seinem zweitem Lehrbuch der Logik eröffnet – die Beschreibung eines Verfahrens, das ohne Zeichen auskommt:[37]

> In a tribe of aborigines who cannot count beyond twenty, a chief is to be chosen from two candidates A and B by awarding the position to the candidate with the larger herd of cattle. The two herds are run through a gate, with a pair of animals, one from each herd, always passing through together, until one or the other herd or both are exhausted. If A's herd is exhausted before B's, B becomes chief; and vice versa, A wins if he has animals left when all of B's have gone through. If the last two animals walk through together, a different method of selection must be used, or a co-chieftancy established.

[36] Vgl. Goodstein (1956, S. 120).

[37] Kleene (1967, S. 175). Ich konnte keine ethnographischen Aufzeichnungen finden, die ein derartiges Verfahren bezeugen würden.

Eine Bejahung der Frage, ob dies noch unter den Begriff des Zählens falle, würde mit sich bringen, dass eine andere, ansonsten unproblematische Frage auf einmal sinnlos würde. Denn sogar dort, wo Hilfsmengen zum Einsatz kommen, lässt sich stets klar sagen, welches die zu zählenden oder bereits gezählten Gegenstände und welches die Hilfselemente sind; hier dagegen scheint es auf die Frage, welche der beiden Ansammlungen abgezählt wird, keine Antwort zu geben. Gleichwohl ist der Grad an Verwandtschaft mit einigen der zuvor betrachteten Zählhandlungen, insbesondere mit der überprüfenden Handlung unseres Hirten, bemerkenswert; deutlich zeigt sich dies in den Regeln, nach denen das Verfahren zur Häuptlingswahl erfolgt:

(1') Von mindestens einem der beiden Thronanwärter müssen alle Tiere das Gatter passieren;
(2') keine Tiere aus anderen Herden als den beiden vorgegebenen dürfen das Gatter passieren;
(3') kein Tier darf das Gatter mehrfach passieren;
(4') das Gatter darf immer nur von einem Paar, bestehend aus einem Tier jeder Herde, passiert werden.

Gewiss, auch beim Zählen werden Paare gebildet, nur setzen sich diese meistens nicht aus gleichartigen Gliedern zusammen, sondern stets aus einem der zu zählenden Gegenstände und dem ihm angehängten Zählzeichen. Die Zählweise der Vedda beschreibt Menninger daher nicht untreffend als gliedweise *Zuordnung*. Auch Frege gebraucht den Begriff, wenn er in der Rezension von Husserls *Philosophie der Arithmetik* dem Rezensierten vorwirft, vergessen zu haben, dass eine «Abzählung [...] auf einer gegenseitig eindeutigen Zuordnung beruht, nämlich der Zahlwörter von 1 bis n und der Gegenstände der Menge».[38] Frege fasst das Zählen damit als einen Spezialfall dessen, was er in den *Grundlagen der Arithmetik* die Prüfung der Gleichzahligkeit zweier Begriffe genannt haben könnte – eines Verfahrens also, wie es die Ureinwohner in Kleenes Beispiel anwenden. Diese Auffassung des Zählens findet sich, leicht variiert und ausführlicher dargelegt, im ersten Band seiner *Grundgesetze* wieder:[39]

> Wenn wir die zu einem Begriffe $\Phi(\xi)$ gehörende Anzahl bestimmen, oder, wie man gewöhnlich sagt, wenn wir die unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fallenden Gegenstände zählen, so ordnen wir diese den Zahlwörtern von Eins an der Reihe nach zu bis zu einem Zahlworte ‚N', das dadurch bestimmt wird, dass die zuordnende Beziehung den Begriff $\Phi(\xi)$ in den Begriff ‚Glied der Reihe der Zahlwörter von ‚Eins' bis ‚N'' und dass die umgekehrte Beziehung diesen Begriff in jenen abbildet. Dann bezeichnet ‚N' die gesuchte Anzahl; d. h. N ist diese Anzahl.

[38] *RH*, S. 183 (319).
[39] *GG 1*, S. 137.

Wohlgemerkt bezeichnet Frege hier einzig die Beziehung, die von den gezählten Gegenständen ausgeht und sie mit den Zahlwörtern paart, als die zuordnende, wohingegen das erste Zitat den Eindruck erweckt, es handle sich bei jener Zuordnung um eine umkehrbare, d. h. symmetrische, Beziehung, die zudem nicht erst durch den Zählakt hergestellt werde, sondern unabhängig davon bestehe.

Sowohl in den *Grundlagen* als auch in den *Grundgesetzen* weist Frege auf die sich aus dem logizistischen Programm ergebende Notwendigkeit hin, den Begriff der Zuordnung als einen rein logischen zu fassen, wozu er von allem Anschaulichen, das ihm anhaftet, gereinigt sein muss;[40] darum will er darunter keinen in der Zeit vollzogenen, und eine wirkliche Verbindung herstellenden Akt verstanden haben, sondern lediglich die *Möglichkeit*, eine solche herzustellen. Dessen ungeachtet macht er dort, wo er von der Möglichkeit der beiderseits eindeutigen Zuordnung spricht, weiterhin von dem verunreinigten Begriff Gebrauch;[41] erst eine nähere Bestimmung lässt den logischen Kern klar hervortreten. Die unter einen Begriff F und die unter einen Begriff G fallenden Gegenstände nennt er dieser Bestimmung nach einander zugeordnet, «[w]enn [...] jeder Gegenstand, der unter [...] F fällt, in der Beziehung ϕ zu einem unter [...] G fallenden Gegenstande steht, und wenn zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, ein unter F fallender Gegenstand in der Beziehung ϕ steht.»[42] Da es sich bei der für das Zählen erforderlichen Zuordnung zudem um eine beiderseits eindeutige handelt, hat die zuordnende Beziehung ϕ weitere zwei Merkmale aufzuweisen: «1. wenn d in der Beziehung ϕ zu a steht, und wenn d in der Beziehung ϕ zu e steht, so ist allgemein, was auch d, a und e sein mögen, a dasselbe wie e; 2. wenn d in der Beziehung ϕ zu a steht, und wenn b in der Beziehung ϕ zu a steht, so ist allgemein, was auch d, b und a sein mögen, d dasselbe wie b.»[43] Überzeugt, den zu bestimmenden Begriff auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt zu haben, kann Frege die Gleichzahligkeit zweier Begriffe F und G schliesslich auf der Existenz einer Beziehung, die sie einander beiderseits eindeutig zuordnet, beruhen lassen.

Die Beziehung, auf deren Existenz die bei einer Zählung oder Gleichzahligkeitsprüfung hergestellte Verbindung beruht, weist also vier logische Merkmale auf: Sie ist links- und rechtstotal sowie rechts- und links-, eben beiderseits eindeutig, wobei sich beim Zählen noch die Eigenheit hinzugesellt, dass ein Anfangssegment der Zählzeichenreihe ihren Nachbereich zu bilden hat. Da zwischen zwei gleichzahligen Mengen im Allgemeinen nicht nur eine Beziehung mit diesen Merkmalen existiert, in jedem Zählakt aber je nur eine darunter wirklich vollzogen wird, erscheint das Zählen nunmehr wie das Ablaufen ei-

[40] Vgl. *GA*, § 70, *GG 1*, S. 3.
[41] Vgl. *GA*, §§ 68, 106 f und *GG 1*, S. 88.
[42] *GA*, § 71.
[43] *GA*, § 72.

nes bereits vorgezeichneten und zuvor unter den vielen möglichen ausgewählten Weges.[44] Eine ganz ähnliche Vorstellung ruft die Passage in Russells logischem Frühwerk hervor, wo es über das Zählen heisst: «When we say one, two, three, etc., we are necessarily considering some one-one relation which holds between the numbers used in counting and the objects counted.»[45] Viel später wird Wittgenstein davon ein treffliches Bild zeichnen: «Was uns verführt die Russell'sche, oder Frege'sche, Erklärung anzunehmen, ist der Gedanke, zwei Klassen von Gegenständen (Äpfeln in zwei Kisten) seien gleichzahlig, wenn man sie einander 1 zu 1 zuordnen *könne*. Man denkt sich die Zuordnung als eine Kontrolle der Gleichzahligkeit. Und hier macht man in Gedanken wohl noch eine Unterscheidung zwischen Zuordnung und Verbindung durch eine Relation; und zwar wird die Zuordnung zur Verbindung, was die ‚geometrische Gerade' zu einer wirklichen ist, eine Art idealer Verbindung; einer Verbindung, die quasi von der Logik vorgezeichnet ist und durch die Wirklichkeit nun nachgezogen werden kann. Es ist die Möglichkeit, aufgefasst als eine schattenhafte Wirklichkeit.»[46]

§ 9 Von dieser schattenhaften Wirklichkeit braucht unser Hirte nichts zu wissen. Wenn er am Abend, nachdem er seine Schafe zusammengetrieben hat, damit beginnt, eines nach dem anderen in den Stall zu drängen, weiss er noch nicht, ob sich jedes mit einer der Kerben auf seinem Stock paaren lassen wird oder ob einige darunter, seien es Schafe oder Kerben, ungepaart bleiben – wüsste er es schon, würde er sich den zusätzlichen Aufwand gewiss ersparen. Und kaum etwas käme ihm fremder vor als die Vorstellung, bei seinem Tun eine vorgezeichnete Bahn abzulaufen, die er zuvor aus einer Palette gleichwertiger Alternativen ausgewählt hätte; welches Schaf beim Betasten welcher Kerbe das Tor zum Stall passiert, gehört nicht zu jenen Begleitumständen, auf die er Acht geben wird. Vorrangig wird unser Hirte darum bemüht sein, das Hereinlassen der Schafe nach den Regeln (1*)-(3*) an das Abtasten der Kerbfolge zu koppeln, wobei insofern Paare gebildet werden, als er für jedes Schaf, das in den Stall tritt, seinen Daumen auf die nächste, noch unbetastete Kerbe gleiten lässt. Mit Menninger könnte man das zur Anwendung kommende Prinzip als ‚ein Schaf - eine Kerbe' zu kennzeichnen versuchen; so aufgefasst würde aber jedes Schaf dem Typ nach stets demselben Zeichen, d. i. dem einzelnen senkrechten Strich, zugeordnet, wohingegen nach Freges Auffassung jedes Schaf seinem

[44] Frege weist selbst auf die Multiplizität der Möglichkeiten hin, wenn er im Anschluss an die oben zitierte Passage aus den *Grundgesetzen* über das Zählen sagt, es lasse «mannichfache Ausführungen zu, da die zuordnende Beziehung nicht völlig bestimmt» sei. In einer aufschlussreichen Diskussion auf S. 88 desselben Werks vergleicht er diese als Möglichkeit aufgefasste Zuordnung mit Hilfslinien in der Geometrie.

[45] Russell (1903, S. 133).

[46] *PG*, S. 355 f.

eigenen Zählzeichen zugeordnet ist. Der gekoppelten Ausführung beider Handlungen lassen sich indes auch andere Paarbildungen zuschreiben, unter anderem die Verbindung des hereintretenden Schafs mit dem da bereits zurückgelegten Segment der Kerbfolge (siehe § 7).

Das agierende Moment der Paarbildung aufnehmend lässt sich das Zählen nun auf mengentheoretischem Hintergrund als das regelgeleitete Herstellen einer Relation auffassen. Ich will dies die logisch-konstruktivistische Auffassung des Zählens nennen. Ihr nach ist die Relation Z, die beim Zählen einer endlichen Menge $\mathfrak{U}$ von unter einen bestimmten Begriff fallenden und nun zu zählenden Gegenständen mittels eines wohlgeordneten Zählzeichensystems $(N, <)$ hergestellt wird, eine Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathfrak{U} \times N$ und besitzt folgende Merkmale:

(1") $\forall x \in \mathfrak{U},\ \exists n \in N : xZn;$
d. h. jeder Gegenstand ist einem Zählzeichen zugeordnet (Z ist linkstotal).

(3") $\forall x \in \mathfrak{U},\ \forall m, n \in N : (xZn \wedge xZm) \rightarrow m = n;$
d. h. jeder Gegenstand ist höchstens einem Zählzeichen zugeordnet (Z ist rechtseindeutig).

(4") $\forall x, y \in \mathfrak{U},\ \forall n \in N : (xZn \wedge yZn) \rightarrow x = y;$
d. h. jedem Zählzeichen ist höchstens ein Gegenstand zugeordnet (Z ist linkseindeutig).

(5") $\forall x \in \mathfrak{U},\ \forall m, n \in N,\ \exists y \in \mathfrak{U} : (xZn \wedge m<n) \rightarrow yZm;$
d. h. den Zählzeichen sind ihrer Reihe nach die Gegenstände zugeordnet.

Jede Relation Z, die diese vier Bedingungen erfüllt, heisse eine Zählrelation auf $\mathfrak{U}$. Da jede Zählrelation linkstotal, rechts- und linkseindeutig ist, definiert sie eine injektive Funktion ζ von $\mathfrak{U}$ auf N. Eine solche Funktion heisse eine Zählfunktion auf $\mathfrak{U}$. Es wird also beim Zählen die Menge der zu zählenden Gegenstände injektiv auf die Reihe der Zählzeichen abgebildet.

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass die zweite Kerbregel (siehe § 6) in der Aufzählung der logischen Merkmale von Zählrelationen keine Entsprechung hat. Die Menge der zu zählenden Gegenstände wird hier als gegeben vorausgesetzt, weshalb sich die Frage, welche Gegenstände dazu gehören und welche nicht, gar nicht erst stellt. Der Hirte dagegen muss seine zerstreute Herde nach aussen gegen andere Herden artgleicher Individuen abgrenzen. Wir werden im zweiten Abschnitt auf dieses Problem zurückkommen. Umgekehrt fehlt in der Aufzählung der Kerbregeln das Pendant zur fünften Regel. Diese ist keinesfalls zeitlich zu verstehen, sondern – in Einklang mit Freges Flucht vor Anschaulichkeiten – als die Forderung, die abzuzählende Menge auf ein lückenloses Anfangssegment der Zählzeichenreihe zu projizieren. Für die Erfüllung dieser Forderung bürgt beim Kerben die Anwendung jenes Zeichenbildungsprinzips, das in § 7 behandelt wurde. Die ersten drei Merkmale von Zählrelationen richten sich schliesslich ganz nach den verbleibenden Regeln (1), (3) und (4).

Es sei weiterhin bemerkt, dass die Rechtstotalität der Zuordnung zugunsten eines im Prinzip nach oben offenen Nachbereichs ersetzt worden ist, wodurch einerseits – bei endlich vielen zu zählenden Gegenständen und ausreichend mächtigem Zählzeichensystem – die geforderte Injektivität von ζ stets eingehalten werden kann und andererseits das Ergebnis der Zählung nicht schon in der Angabe der Zielmenge enthalten ist. So wird das Entdeckerische am Zählen nicht vorweg negiert. Das Bild der abzuzählenden Menge $\mathfrak{U}$ unter einer Zählfunktion ζ ist aufgrund der Merkmale (4”) und (5”) mit einem Anfangssegment von $(N, <)$ identisch; für den Fall, dass $\mathfrak{U}$ n Elemente enthält, handelt es sich dabei um die aus den ersten n Gliedern der Zählzeichenreihe bestehende Menge A_n – oder um es mit Russell zu sagen: um die Menge der in jener Zählung tatsächlich angewandten Zeichen. Als endliche Teilmenge von N enthält A_n ein eindeutiges Maximum; es ist dies das Zeichen der Anzahl, das Anzahlzeichen, von $\mathfrak{U}$. Da, sobald $\mathfrak{U}$ von einer Zählfunktion surjektiv auf A_n abgebildet wird, dies auch von jeder anderen gilt, hängt unser Begriff des Anzahlzeichens nicht von der Wahl einer bestimmten Funktion ab. Er ist somit wohldefiniert, und zwar nicht nur im mathematischen Sinne, sondern auch hinsichtlich seiner Anwendbarkeit auf unsere Praxis des Zählens, deren – recht besehen – erstaunlichster Zug es ist, dass die Reihenfolge, in der die zu zählenden Gegenstände gezählt werden, für das Ergebnis der Zählung unerheblich ist.

Kritik an der Auffassung des Zählens als zuordnender Tätigkeit

§ 10 In der Mengenlehre ist ein Paar $\langle a, b\rangle$ – mitunter ein geordnetes Paar genannt – üblicherweise mit einer Richtung versehen, der entlang a das erste und b das zweite Glied ist. Relationen können sich, sofern sie als Mengen solcher Paare aufgefasst werden, mithin auch dann noch unterscheiden, wenn sie dieselben Gegenstände miteinander verbinden; so lassen sich die Relationen des Mutter- und des Tochterseins einzig in Hinsicht auf die Anordnung ihrer Relate auseinanderhalten. Die Gerichtetheit von Relationen hat ihr Gegenstück – wenn nicht eher ihren Ursprung – in der Sprache. Relationale Ausdrücke weisen in Bezug auf die Richtung, nach der die Wörter im Satz angeordnet sind, eine erste und eine zweite Argumentstelle auf; nicht selten ändert es den Wahrheitswert des Satzes, der aus deren Sättigung durch zwei Argumente hervorgeht, wenn diese vertauscht werden. Das Vertauschen der Ausdrücke ‚der Mont Blanc' und ‚das Matterhorn' in ‚Der Mont Blanc überragt das Matterhorn' etwa führt einen wahren Satz in einen falschen über. In manchen Fällen kann die Vertauschung der Argumente den Wahrheitswert nun aber belassen, wie er ist; ‚Tristan liebt Isolde' und ‚Isolde liebt Tristan' sind – wenn auch nur in einem fiktionalen Sinne – beide wahr. Gerade an diesem letzten Beispiel indes lässt sich die Möglichkeit einer weiteren Unterscheidung erblicken.

Wo die Vertauschung der Argumente den Wahrheitswert des Satzes unverändert belässt, muss der Sinn, den er ausdrückt, nicht derselbe bleiben. Dass die Liebe bei Tristan und Isolde auf Gegenseitigkeit beruht, ist gewissermassen dem Zufall zu verdanken; es könnte sich anders verhalten haben. Demnach wäre auch die Liebe, obschon sie für manche Paare durchaus symmetrisch ausfallen könnte, eine gerichtete Beziehung. Bisweilen aber tangiert die Vertauschung der Argumente nicht einmal den Sinn des Satzes; zum Beispiel drücken die beiden Sätze ‚Robert und Vera wohnen zusammen' und ‚Vera und Robert wohnen zusammen' ein und denselben Sinn aus, was sich nicht zuletzt daran erweist, dass sie unter allen denkbaren Umständen immer denselben Wahrheitswert beibehielten. Dieses Fehlen einer Richtung, diese Ungerichtetheit, ist ein formaler Zug der Beziehung des Zusammenwohnens, den es eigentlich von materialen Merkmalen wie der Symmetrie oder Reflexivität abzugrenzen gälte. Symmetrie ist das Merkmal einer gerichteten Beziehung, für jedes geordnete Paar $\langle a, b \rangle$, das in ihre Extension fällt, darin ebenfalls das verkehrte Gegenstück $\langle b, a \rangle$ zu enthalten. In die Extension einer ungerichteten Beziehung dagegen fallen allein ungeordnete Paare, etwa die zweielementige Menge $\{a, b\}$, die der Gerichtetheit unserer Notation zum Trotz freilich mit $\{b, a\}$ identisch ist. Vielleicht wäre zwischen Gerichtetheit und dem, was hier Ungerichtetheit genannt wird, eine weitere Unterscheidung möglich.[47]

Obgleich die Ungerichtetheit einer Beziehung von ihren materialen Merkmalen trennbar ist und die resultierende Unterscheidung zumindest auf den ersten Blick für die logische Analyse von Sätzen von Belang sein könnte, wird sie in der modernen Logik weitestgehend ignoriert. (Anders verhält es sich, wie wir noch sehen werden, in gewissen Zweigen der Mathematik.) Es scheint, als habe auch Frege keinen logisch relevanten Graben zwischen Symmetrie und Ungerichtetheit gesehen, wenn er in den *Grundlagen* von der Beziehung, die in dem Satz ‚Peleus und Thetis waren die Eltern des Achilleus' zur

[47] Gerichtet zu sein, könnte i. e. S. für eine Beziehung bedeuten, dass sie der Reihe nach eine erste und eine zweite Argumentstelle aufweist, wohingegen Beziehungen, deren Argumentstellen zwar nicht geordnet, aber gleichwohl spezifizierbar sind, als i. w. S. gerichtet bezeichnet würden, wobei die Stellen dort spezifizierbar wären, wo es einen Unterschied macht, ob die eine Stelle durch ‚a' und die andere durch ‚b' oder umgekehrt die andere durch ‚a' und die eine durch ‚b' besetzt wird. Zeitliche Vorrangigkeit etwa scheint mir i. e. S., Liebe hingegen nur im i. w. S. gerichtet zu sein. Vgl. hierzu weiterführend Fine (2000).

Sprache kommt, sagt, sie sei eine umkehrbare, und damit nichts anderes als ihre Symmetrie meint.[48] (Dessen ungeachtet liefert er an dieser Stelle ein grammatisches Kriterium zur Erkennung ungerichteter Beziehungen: die Möglichkeit, die beiden Argumente *salva congruitate* durch ein ‚und' zu verbinden und gleich einem einzigen, zusammengesetzten Subjekt dem Prädikat voranzustellen.) Auf die Frage, ob auch die Beziehung, auf der das Zählen beruhen soll, eine symmetrische ist, lassen Freges Aussagen, wie bereits bemerkt, unterschiedliche Antworten zu. Während nach jener Stelle aus der Rezension Husserls der Zuordnung keine Richtung anzuhaften scheint, wird in der ausführlicher zitierten Passage aus den *Grundgesetzen* klar unterschieden zwischen der zuordnenden Beziehung, die von den zu zählenden Gegenständen ausgeht, um sie ihrem Zählzeichen zuzuordnen, und ihrer Umkehrung, die das beanspruchte Anfangssegment der Zählzeichenreihe zurück auf den Begriff abbildet, unter den jene Gegenstände fallen.[49]

Ein Verfechter der logisch-konstruktivistischen Position jedenfalls wäre dazu verpflichtet, seine Auffassung der beim Zählen gebildeten Paare als Elemente des kartesischen (und damit gerichteten) Produkts aus den beiden betreffenden Mengen zu begründen. Unter anderem müsste er sich die Frage gefallen lassen, weshalb nicht die Umkehrung seiner Zählrelation für die beim Zählen hergestellte zu nehmen sei, sodass nicht die Gegenstände den Zeichen, sondern umgekehrt die Zeichen den Gegenständen zugeordnet würden. Dabei würde sich bald herausstellen, dass einzig technische Erwägungen dafür sprechen, die eine Richtung der anderen vorzuziehen: Eine Relation definiert nur dann eine Funktion auf ihrem Vorbereich, wenn sie linkstotal ist; hätte man die (gesamte) Zählzeichenreihe als Vorbereich gewählt, wäre diese Eigenschaft verloren gegangen, was wiederum die Definition des Anzahlzeichenbegriffs unnötig erschwert hätte. Daraus folgt indessen nicht, dass die Relation zwischen dem gezähltem Gegenstand und seinem Zählzeichen als im selben Sinne ungerichtet angesehen werden darf wie jene zwischen den Elternteilen des Achilleus. Beim Zählen gilt es klar zu trennen zwischen dem, was gezählt wird, und dem, womit gezählt wird, zumal den Zählzeichen im Rahmen von Zählhandlungen eine ganz andere Rolle zukommt als den zu zählenden oder bereits gezählten Gegenständen. Diese Differenz spiegelt sich nicht zuletzt in der Ungleichartigkeit

[48] Vgl. *GA*, § 70. Demnach hiesse eine Beziehung umkehrbar, falls ihr Umfang mit dem Umfang ihrer Umkehrung zusammenfällt. Die Unterscheidung einer Beziehung von ihrer Umkehrung ist freilich nur dort sinnvoll, wo Gerichtetheit angenommen wird. Zum Begriff der Umkehrung einer Beziehung, vgl. *GG 1*, § 39; zum entsprechenden Begriff der Umkehrung einer Relation, vgl. *GG 2*, § 163.

[49] Vielleicht lässt sich der vermeintliche Widerspruch auflösen durch die Unterscheidung einer zuordnenden Beziehung, die asymmetrisch (oder mindestens nicht-symmetrisch) ist, und der aus ihr hervorgehenden Zuordnung, die der logischen Summe der zuordnenden Beziehung und ihrer Umkehrung entspricht. Dies würde mit der Redeweise in den *Grundlagen* übereinstimmen, wo es von den unter einen und den unter einen anderen Begriff fallenden Gegenständen mehrfach heisst, sie seien (durch die zuordnende Beziehung) *einander* zugeordnet (vgl. §§ 70, 71, 72).

der Relate wider, auf die (zu Beginn von § 8) mit gutem Grund hingewiesen worden war. Hat man sich einmal, sei es nun aus technischen oder aus anderen Gründen, für die eine Richtung entschieden, sind die Relate der Zählrelation nicht mehr vertauschbar.

In eine ungleich problematischere Lage dürfte der Verfechter dieser Position jedoch bei dem Versuch geraten, die basalere Behauptung, wonach beim Zählen überhaupt eine Relation hergestellt werde, aufrechtzuerhalten.

§ 11 Vielleicht hätte unser Hirte inzwischen Besuch erhalten von einem Kikuyu, dem die Kunst des Zählens – aus welchen Gründen auch immer – gänzlich verborgen geblieben wäre (siehe § 3). Seinem geschärften Verstand indes würde nicht entgangen sein, dass der Hirte auf die Reihenfolge, in der er seine Schafe in den Stall schleust, überhaupt nicht achtet und diese auf das Ergebnis der Prüfung ihrer Vollzähligkeit offenbar keine Auswirkung hat. Nicht ohne Erstaunen hätte er die Tatsache zur Kenntnis genommen, dass es dem Hirten trotz grosser Unterschiede in der jeweiligen räumlichen Zusammenstellung seiner Herde und unter Anwendung jenes geheimnisvollen Stocks nach stets denselben Regeln am Ende doch immer wieder gelingt, dieselbe Kerbe zu erreichen. Wirklich rätselhaft dürfte ihm seine Reaktion auf das Nichterreichen der letzten Kerbe erscheinen, zumal der Hirte auch dann an seiner Überzeugung, wonach einige Schafe fehlten, festhielte, wenn er ausserstande wäre anzugeben, welche fehlen. Wie soll er denn wissen können, dass Schafe fehlen, ohne zu wissen, welche fehlen? Dem zwar zählunkundigen, aber auf das Erkennen von Vieh abgerichteten Besucher würde es gewiss schwer fallen zu glauben, es sei hier alles mit rechten Dingen zugegangen. Sollte er sich trotzdem von der Aufrichtigkeit unseres Hirten überzeugen lassen, würde ihm die schier unbegrenzte Anwendbarkeit des Zählens umso gewaltiger vor Augen geführt, als der Hirte keines seiner Schafe einzeln zu kennen braucht, um in diversen Situationen das Fehlen nur schon eines einzigen darunter feststellen zu können. Würde der Zählkundige dann nicht in der Lage sein, dies bei unzählig vielen anderen Scharen von Dingen zu tun, selbst wenn sie ihm gänzlich fremd sind?

Ein Zählkundiger braucht die Dinge, die er zu zählen vermag, nicht nur nicht einzeln zu kennen, er muss zu keiner Zeit auch nur für eines der gezählten oder noch ungezählten Dinge eine Kennzeichnung zur Hand haben, die ihm über raumzeitliche Verschiebungen hinweg immer wieder einen Zugriff auf dieses Einzelne erlauben würde. Wie könnte er nach getaner Arbeit da an eine Antwort auf die Frage, welches Ding er bei Erreichen dieses oder jenes Zählzeichens gerade auf den Haufen der gezählten gelegt hatte, überhaupt denken? Diese simple Feststellung allein genügt schon, um die Vorstellung ins Wanken zu bringen, beim Zählen würde eine Verbindung zwischen den zu zählenden Dingen und den angewandten Zeichen hergestellt; zudem weist sie auf den wesentlichen Punkt, an dem sich das Vorgehen unseres Hirten von jenen verwandten Handlungsweisen scheidet, die wir unter dem Begriff des Nummerierens zu versammeln pflegen. Behauptete unser Hirte, seine Schafe nicht (bloss) gezählt, sondern (auch) nummeriert zu haben, müsste er auf die gestellte Frage eine andere Antwort bereithalten.

In unserem Kulturkreis, wo gegenwärtig ein geradezu fetischistischer Hang zur Erstellung von Ranglisten aller Art vorzuherrschen scheint, findet das Nummerieren mindestens ebenso weite Verbreitung wie das Zählen. Alpine Skirennen zum Beispiel sind stets umrahmt von zwei verschiedenen Nummerierungen des Teilnehmerfeldes; erstere schlägt sich in der Startliste, letztere im Schlussklassement des Anlasses nieder.[50] Sehen wir von den komplexen Verfahren, die bei der Vergabe der Startnummern an professionell organisierten Anlässen üblicherweise zur Anwendung kommen, ab, erweisen sich Klassement und Startliste als nahezu prototypisch für zwei auseinanderzuhaltende Arten des Nummerierens. Während die Nummerierung für das Klassement entlang einer vorgegebenen Ordnung – d. i. der durch die Relation ‚x hat den Lauf in kürzerer Zeit absolviert als y' induzierten – geschieht, erfolgt die Vergabe der Startnummern wahlweise willkürlich oder nach Verlosung. Die zu nummerierenden Gegenstände muss der Ausführende natürlich nicht im Voraus einzeln kennen; damit die Nummerierung ihren Zweck erfüllen kann, ist aber ein Mittel erforderlich, um jeden einzelnen Teilnehmer als Träger des ihm zugeordneten Ordnungszeichens wiederzuerkennen.

Wo die Nummerierung entlang einer bereits bestehenden streng linearen Ordnung geschieht, bedarf es nebst der Auflösung allfälliger Ambiguitäten hinsichtlich der intendierten Struktur lediglich noch der Angabe des Ordnungszeichens, um das gesuchte Glied eindeutig zu lokalisieren; so z. B., wenn die Grossmutter sich auf dem alten Klassenfoto als die dritte von links in der zweiten Reihe zu erkennen gibt. Den k-ten Platz im Schlussklassement eines Skirennens belegt analog derjenige Fahrer mit der k-t schnellsten Laufzeit – jener Zeit also, die in der Liste aller gestoppten Zeiten (beginnend bei der schnellsten und entlang genannter Relation) an jener Stelle auftauchen würde, der nach erfolgter Nummerierung das Element mit dem k-ten Rang in der Zählzeichenreihe zugeordnet wäre. Um von dieser Liste zum fahrenden Individuum zu gelangen, ist indes eine weitere Verbindung nötig; wir können sie uns der Einfachheit halber allein durch die vergebene Startnummer vermittelt denken. Demzufolge lässt sich ausgehend von der Angabe eines Ordnungszeichens auf die Laufzeit übergehen und von dort wiederum auf

[50] Bei Rennen, die in zwei Läufen ausgetragen werden, kommen zwischen der Startliste zum ersten Lauf und dem Schlussklassement noch das Zwischenklassement nach dem ersten Lauf sowie die Startliste zum zweiten Lauf hinzu, die sich aus der Umkehrung eines Anfangssegments des Zwischenklassements ergibt.

die beigeordnete Startnummer, die schliesslich zu dem Fahrer führt, dessen Schlussrang jenem des angegebenen Ordnungszeichens entspricht. Im Unterschied zum ersten ist das letzte Teilstück jedoch Ergebnis der auf Willkür oder Zufall fussenden Nummerierung des Teilnehmerfeldes; die Verbindung des Ordnungszeichens mit dem nummerierten Individuum muss deshalb auf irgendeine Weise festgehalten werden. Bei alpinen Skirennen werden hierzu üblicherweise mit der jeweiligen Startnummer beschriftete Trikots an die Fahrer vergeben, die während der Fahrt für alle sichtbar über den Anzug zu tragen sind; im wortwörtlichen Sinne haftet sodann jedem einzelnen Fahrer die eigene Startnummer an. Die für die Vergabe massgebliche Nummerierung dient also nicht nur der Festlegung der Reihenfolge, in welcher die Fahrer zu starten haben, sondern sie erzeugt zudem in genügender Anzahl Zeichen, um jeden beliebigen Fahrer einzeln aus dem nummerierten Teilnehmerfeld herauszugreifen. Allgemeiner gesagt, versehen Nummerierungen dieser Art die abzuzählende Menge mit einer streng linearen Ordnung und ihren Benutzer zugleich mit neuen Mitteln des Zugriffs auf die nummerierten Gegenstände.

Dagegen erlauben es die bei einer Zählung angewandten Zeichen nicht, auf die gezählten Gegenstände einzeln zuzugreifen; einzig das zuletzt erreichte Zählzeichen ist nach der Zählung noch von Bedeutung. Weiter gebrauchen lässt es sich in Aussagen, die von der abgezählten Menge als Ganzes handeln, nicht aber in solchen, die von gezählten Gegenständen im Einzelnen handeln. Obgleich beim Nummerieren und beim Zählen also oftmals dieselben Zeichensysteme zur Anwendung kommen, lassen die angewandten Zeichen einen jeweils ganz anderen Gebrauch zu. Um dieser Diskrepanz Rechnung zu tragen, wird in der Literatur denn auch nicht selten ein kardinaler von einem ordinalen Gebrauch der Numeralia unterschieden; diese Unterscheidung erscheint umso angebrachter, als in vielen Sprachen der ordinale gegenüber dem kardinalen Gebrauch morphologisch (im Bereich der Schrift auch spezifisch graphematisch[51]) markiert ist. Erstaunlicherweise geschieht die entsprechende Trennung der zwei zugrundeliegenden Handlungsweisen nur selten; bisweilen ist eine regelrechte Verwechslung von Zählen und Nummerieren auszumachen, so etwa bei Parsons, wenn er über das Zählen schreibt: «One way of looking at counting is to suppose that each numeral m used in the count has the force of a demonstrative, designating in the context the object with which it is correlated, so that it has the force of ‚the mth'.»[52] Im Kontext einer Zählung, das scheint mir unbestreitbar, hat keines der angewandten Zählzeichen jene demonstrative Kraft, von der bei Parsons

[51] In Aufzählungen unterschiedlicher Art ist die Setzung eines Punktes nach dem Zahlzeichen gebräuchlich.
[52] Parsons (2008, S. 192).

die Rede ist; eine solche kann ihnen hingegen im Rahmen einer Nummerierung verliehen werden.

Sobald diese nun etwas plump wirkende Vermengung aufgehoben ist, büsst die Vorstellung, wonach beim Zählen eine Verbindung zwischen den gezählten Gegenständen und den angewandten Zählzeichen hergestellt werde, unweigerlich an Plausibilität ein. Mit Goodstein, der Zählen und Nummerieren (er nennt es *ordering by numbers*) auseinanderzuhalten weiss, könnte man versuchen, das Nummerieren als die grundlegendere Handlungsweise zu etablieren und das Zählen bloss als einen besonderen Fall danach zu behandeln.[53] Beim Zählen, könnte man sagen, werde die hergestellte Verbindung der gezählten Gegenstände zu den Zählzeichen, und mit ihr die vermittelte Ordnung unter ihnen, ignoriert. Seltsamerweise würde demnach jene verbindende Relation, deren regelgerechte Herstellung angeblich den Erfolg einer jeden Zählhandlung wesentlich bedinge, mindestens im Geiste sogleich wieder aufgelöst. Wozu bräuchte es diese Relation überhaupt? Vor allem aber impliziert diese Auffassung, dass sich zu den gezählten Gegenständen immer eine Verbindung herstellen lässt, die, wenn sie nicht ignoriert würde, auch Bestand hätte. Dies halte ich indes für offenkundig falsch. Nicht immer lässt sich, was zählbar ist, auch nummerieren. Ein einfaches Gedankenexperiment genügt, um dies einzusehen.

§ 12 Man denke sich einen zugedeckten Korb voller Äpfel, die bezüglich Grösse, Farbe, Gewicht und sonstigen Eigenschaften dieser Art alle gleich sind. Dieser Korb gehöre einer Person namens Sortes, der wir beliebige Aufforderungen erteilen können. Wie handelt Sortes, wenn wir ihn dazu auffordern, die Äpfel in seinem Korb zu zählen und, alsbald sie gezählt sind, in einen zweiten, ebenfalls zugedeckten Korb zu legen? Nun, er greift in seinen Korb, zieht einen Apfel heraus; sagt, schreibt oder denkt dabei „eins"; und legt den gezählten Apfel in den anderen Korb. Im nächsten Schritt greift er wieder einen Apfel aus seinem Korb heraus; dabei sagt er diesmal „zwei"; und legt den gezählten Apfel wiederum in den anderen Korb. Die Reihe der Zählzeichen aufsteigend wiederholt er diese Handlungsabfolge solange, bis keine Äpfel mehr in seinem Korb vorhanden sind. Das zuletzt erreichte Zählzeichen ist dann zugleich Sortes' lakonische Antwort auf unsere Frage, wieviele Äpfel in seinem Korb lagen. Wie aber würde er handeln, wenn wir ihn nun aufforderten, die Äpfel im zweiten Korb zu nummerieren und, alsbald sie nummeriert sind, zurück in seinen Korb zu legen? Vielleicht würde er in kluger Voraussicht fragen, ob es ihm gestattet sei, die nummerierten Äpfel jeweils zu markieren oder, anstatt sie in seinen verdeckten Korb zu legen, davor aufzureihen. Denn sollten wir ihm Eingriffe

[53] Vgl. Goodstein (1956, S. 127).

solcher Art verbieten, sähe er sich gezwungen zu bekennen, dass es ihm unter den gegebenen Umständen unmöglich sei, der Aufforderung nachzukommen. Freilich, er könnte die Äpfel wiederum zählen und zurück in seinen Korb legen; es stünde ihm dann aber kein Mittel zur Verfügung, um unsere Frage, welcher unter den Äpfeln in seinem Korb nun der an fünfter Stelle gezählte – d. h. der mit dem fünften Zählzeichen verbundene – sei, korrekt zu beantworten. Auch wenn wir einen Apfel aus seinem Korb herausgriffen und fragten, um den wievielten es sich handle, wüsste Sortes keine Antwort.

Jene Verbote, die Sortes in dem Gedankenexperiment auferlegt werden, mögen zwar reichlich willkürlich erscheinen; es sind aber durchaus reale Umstände denkbar, die einen Zählenden in vergleichbarem Masse einschränken. (Man versuche einmal, die unter einer Autobahnbrücke hindurch sausenden Fahrzeuge zu nummerieren.) Auch die Festsetzung, wonach sich die Äpfel bezüglich Grösse, Farbe, Gewicht und sonstigen Eigenschaften dieser Art alle gleich sind, mag in mancher Situation ihre reale Entsprechung haben; man denke nur an einen grossen Haufen Kaurimuscheln, den es zu nummerieren gälte. Könnten die Unterschiede zwischen einzelnen Muscheln nicht derart gering ausfallen, dass sie von den menschlichen Sinnen nicht registriert würden? Nicht für jede Muschel stünde dem Zählenden in einem solchen Fall eine Kennzeichnung – geschweige denn ein Name – zur Verfügung, an die er jenes Zählzeichen, dem er sie zuordnen wollte, knüpfen könnte. Indem er die einmal nummerierten Muscheln Glied für Glied räumlich in einer Reihe aufstellte, schüfe er sich zwar neue Mittel des Zugriffs; nach der k-ten Muschel gefragt, müsste er lediglich vom ersten Glied an zählend der Muschelreihe entlang wandern, bis das k-te Zählzeichen erreicht wäre. (Man könnte sich fragen, ob es sich bei diesem Wandern entlang der Muschelreihe um ein Zählen – immerhin zählt nur das zuletzt erreichte Zeichen – oder eher um ein Nummerieren – zumal es den Rang eines Reihenglieds und nicht die Anzahl einer Menge zu bestimmen gilt – handelt.) Die Begrenztheit solcher Mittel zur Lokalisierung zeigt sich aber spätestens bei wechselhaften raumzeitlichen Verhältnissen, denen Gegenstände, besonders kleine und leichte, unterworfen sein können; ein Nummerierender müsste sich über den ständigen Wandel stets auf dem Laufenden halten, womit er rasch überfordert wäre. Es bedarf daher nicht ungeheuerlicher Fantasie, um sich Situationen vorzustellen, in denen die stetige Bewegung der Gegenstände ihre Nummerierung unmöglich macht, wohingegen ihre Zählbarkeit aufgrund einer simplen Trennung der bereits gezählten von den noch nicht gezählten Gegenständen nach wie vor gesichert wäre. Dass schliesslich die Beschriftung der zu zählenden Dinge in der Praxis nicht immer möglich ist, dass also der Akt des Nummerierens nicht immer die Voraussetzungen seiner Ausführbarkeit selbst zu schaffen vermag, scheint mir ebenso offenkundig.

Bereits in § 9 wurde darauf hingewiesen, dass sich jener gekoppelten Ausführung bestimmter Handlungen, die das Zählen ausmacht, durchaus verschiedene Paarbildungen zuschreiben lassen; die Vorstellung, wonach beim Zählen jeder gezählte Gegenstand seinem eigenen Zählzeichen zugeordnet werde, ist nur eine unter anderen. Und vielleicht liesse sich die Auffassung des Zählens als einer zuordnenden Tätigkeit dahingehend revidieren, dass die Zählzeichen nicht als mit den gezählten Gegenständen einzeln verbunden gedacht würden, sondern mit derjenigen Menge, die aus den jeweils bereits gezählten und nun weggelegten Gegenständen besteht. Demnach würde unser Sortes, wenn er sich z. B. das fünfte Zählzeichen notiert, diesem nicht den eben gezählten und in den Korb gelegten Apfel zuordnen, sondern die ganze Menge der bis dahin gezählten Äpfel. Nur lässt sich gegen diese revidierte Fassung wiederum derselbe Einwand anbringen, zumal Sortes in keinem Zählschritt ausser dem letzten in der Lage sein muss anzugeben, welche Menge er dem k-ten angewandten Zählzeichen zugeordnet habe. Des Weiteren müsste der Vorbereich der zuordnenden Beziehung auf die Potenzmenge der zu zählenden Menge ausgeweitet werden, was ihrer formalen Eleganz nicht gerade zuträglich wäre; vor allem aber, würde aus dieser Anpassung eine ganz andere Auffassung des Zählens hervorgehen.

Anstatt nun krampfhaft zu versuchen, diese revidierte Fassung gegen die erhobenen und mögliche weitere Einwände zu verteidigen, erachte ich es für klüger, sich endgültig von der Auffassung des Zählens als einer zuordnenden Tätigkeit zu verabschieden. Beim Zählen wird nichts zugeordnet, weder in dem ersten Sinne, dass eine Relation zwischen Gegenständen und Zählzeichen hergestellt würde, noch in dem daraus abgeleiteten Sinne, dass die Ordnung der Zählzeichenreihe auf die zu zählende Menge übertragen würde. Freilich ist damit nicht negiert, dass für jede zählbare Vielheit immer schon eine zuordnende Beziehung – und mit ihr ihre Umkehrung – im Sinne Freges existiert, die sie auf das gleichzahlige Anfangssegment einer beliebigen Zählzeichenreihe linkseindeutig abbildet.

Ein anderes Bild des Zählens

§ 13 Die Elemente für ein anderes, angemesseneres Bild des Zählens liegen, wenn auch verstreut über verschiedene Orte, im Text schon vor. Das Bild, das im nun letzten Paragraphen des ersten Abschnitts entworfen werden soll, ist indes nicht mehr als ein tentatives; es soll danach nicht der Versuch unternommen werden, den Entwurf gegen allerlei mögliche Einwände stark zu machen. Der Text wird sich in eine andere Richtung bewegen, eine Frage verfolgend, die sich eben zuvor aufgetan hat.

Das erste Element ist in dem Gleichnis enthalten, wonach sich unser Hirte mit dem Kerbstock einen Massstab zurechtgeschnitzt habe. Wie jeder Massstab, der sich mit Händen greifen lässt, ist auch der Kerbstock in seiner Anwendbarkeit beschränkt; wollte der Hirte in gewohnter Weise die Vollzähligkeit einer Herde überprüfen, die mehr Tiere zählt als das Holz Kerben, müsste er die Folge dieser Kerben um die fehlende Anzahl ergänzen, und zwar nach demselben Prinzip der Zeichenbildung, das bereits beim Kerben der vorhandenen Folge zur Anwendung gekommen ist. Die Reihe der Zeichen, die sich danach bilden lassen, unterliegt keiner prinzipiellen Begrenzung nach oben; die eingeritzte Kerbfolge stellt daher das nur kurze Anfangssegment einer ungleich längeren Skale dar. Der Zählende steigt nun, bei dem ersten Glied beginnend, die Reihe der Zählzeichen empor. Obgleich er dabei lückenlos vorgeht, d. h. kein Zeichen dazwischen unangewandt belässt, liest sich das Ergebnis der Messung allein an dem zuletzt erreichten ab. Den dazwischenliegenden Zählzeichen ergeht es also gleich wie den Sätzen der *Logisch-philosophischen Abhandlung*: Der Zählende steigt durch sie – gleichsam auf ihnen – über sie hinaus; am Ende kann er sie, wie *scalae*, auf denen er emporgestiegen ist, wegwerfen.

Das Detail, welches die Reihe der Zählzeichen als das Instrument einer Messung darstellt, fügt sich reibungslos in Freges Auffassung des Zählens als eines Spezialfalls der Prüfung auf Gleichzahligkeit. Wo sich die Umfänge zweier Begriffe nicht direkt vergleichen lassen, springt die Reihe der Zählzeichen vermittelnd in die Bresche, gleich einem Standard, an dem sich beliebige (endliche) Begriffsumfänge messen lassen. Diese vermittelnde Rolle können die Zählzeichen jedoch nur deshalb einnehmen, weil sich die Beziehung der Gleichzahligkeit als eine transitive herausstellt. Umgekehrt bedingt dieselbe Transitivität auch die Möglichkeit, anstelle der beabsichtigten Gegenstände ihre Stellvertreter zu zählen (was nebenher den Weg zur Umgehung gewisser Tabus ebnet). Unterschiede unter den vertretenen Gegenständen muss die hierfür hergestellte Stellvertreterrelation keine übermitteln; das Ergebnis einer solchen Messung ist invariant unter Permutation ihres Vorbereichs. Die Identität der zu zählenden Gegenstände spielt somit für das Ergebnis ihrer Zählung keine Rolle. Der Zählende muss einen gezählten Gegenstand, um es in Freges Worten zu sagen, nicht als denselben wiedererkennen können; auch wenn für jeden Gegenstand ein allgemeines Kennzeichen vorläge, der Zählende bräuchte es nicht anzuwenden. Daran zeigt sich, wie falsch die Vorstellung ist, die beim Zählen angewandten Zeichen funktionierten als Namen oder indexikalische Ausdrücke für die einmal gezählten Gegenstände; es sind im Allgemeinen weder die Bedingungen für eine Taufe noch jene für die Einsetzung eines dauerhaften, d. h. in einem Wiedererkennungsurteil anwendbaren, Kennzeichens gegeben. Niemand bräuchte also darüber besorgt zu sein, dass gezählten Lebewesen etwas zustossen könnte, weil sie mit den Namen Todgeweihter angerufen worden seien.

Der Daumen unseres Hirten fährt – wie die Nadel in der Anzeige einer Waage über die Skale – der Reihe der Zählzeichen entlang, wenn auch nicht stetig, sondern sprunghaft von einem Glied zum nächsten. Das in einem Zählschritt gerade erreichte Zeichen zeigt die Anzahl der bislang abgezählten Menge an – und nicht auf einen bestimmten Gegenstand unter den gezählten. Die dazu nötige Verbindung zwischen dem Zählzeichen und der abgezählten Menge besorgt ein Mechanismus, der zwei Vorgänge aneinanderkoppelt: die Verwandlung von ungezählten Gegenständen in gezählte einerseits, und das Emporsteigen entlang der Zählzeichenreihe andererseits. Diese Kopplungsfunktion ist an dem bei Kleene geschilderten Verfahren besonders deutlich erkennbar, nur dass beim Zählen das Gatter nicht beidseits von Rindviechern, sondern stets von einem der zu zählenden Gegenstände und einem Zählzeichen durchlaufen wird. Die Verwandtschaft der beiden Verfahren weiter in Anspruch nehmend, liesse sich der Zählmechanismus nun als in einem doppelspurigen Gatter vergegenständlicht denken, wobei die eine Spur den zu zählenden Gegenständen, die andere einem Massband, d. i. der ausgewählten Zählzeichenreihe, vorbehalten wäre. Zu Beginn der Zählung wäre demnach die abzuzählende Vielheit auf der einen Spur vor dem Eingang des Gatters versammelt und auf der anderen das Massband in seine Anfangsposition versetzt; mit jedem Gegenstand, der sodann das Gatter durchliefe und dadurch vom Lager der noch ungezählten in das der bereits gezählten Gegenstände wechselte, würde das Massband um eine Skalenstelle nach vorne auf seiner Spur durch das Gatter rücken; an sein Ende käme der Vorgang mit dem Durchlauf des letzten noch ungezählten Gegenstandes, der gleichzeitig zum letzten Vorrücken des Massbandes erfolgen würde; das Ergebnis der Zählung schliesslich wäre an der zuletzt eingenommenen Position des Massbandes in Bezug auf das Gatter abzulesen.

Die einzige Verbindung, die dabei zwischen der abzuzählenden Vielheit und der Reihe der Zählzeichen hergestellt wird, ist eben jene, dass die Durchläufe ihrer jeweiligen Elemente nach bestimmten Regeln aneinandergekoppelt sind; der einzelne Gegenstand wird dadurch aber nicht mit dem gleichzeitig das Gatter durchlaufenden Zeichen in irgendeine relevante Relation gebracht. Der Zählmechanismus funktioniert eher wie ein defekter Reissverschluss, bei dem zwar Zähnchen beidseits des Keils mit gleicher Frequenz den Schieber passieren, diese aber nicht wie bei einem funktionierenden Verschluss ineinander verhakt werden, sondern unten wieder ausscheren. An dem Ausscheren der einmal gezählten Gegenstände zeigt sich, dass durch das Zählen keine Ordnung auf sie übertragen wird; um neue Ordnung in die abzuzählende Vielheit zu bringen, müsste der Mechanismus über eine zusätzliche Funktion verfügen. Gleichwohl ist nicht ausser Acht zu lassen, dass sie durch den Zählvorgang in zwei stetig zu- bzw. abnehmende Lager getrennt wird, d. i. in jenes der bereits gezählten und in jenes der noch ungezählten Gegenstände. Zählen ist nicht unwesentlich ein Trennen.

Das trennende Überführen von einem Zustand in den anderen ist uns bereits in Seidenbergs Skizze des prototypischen Schöpfungsrituals begegnet, worin bei namentlicher Anrufung paarweise auftretende Menschen vom Leben in den Tod befördert werden. Es scheint mir nicht weit hergeholt, sich diese Überführung als eingebettet in einer streng getakteten (vielleicht mit Trommelspiel unterlegten) Handlungsabfolge vorzustellen; ist denn nicht jedes Ritual wesentlich mit Rhythmus – dem ihm eigenen Rhythmus – versetzt? Wie weit von Schöpfungs- und anderen Ritualen das säkularisierte Zählen auch entfernt sein mag, deren rhythmische Natur, das Regelmässige daran, vermochte es nicht abzulegen. Es ist kein Zufall, dass ‚ρυθμίζειν' im Altgriechischen dasselbe wie ‚abmessen' oder ‚abwägen' (und im Neugriechischen offenbar das Einstellen eines Messinstruments) bedeuten kann.[54] Eine der, wie mir scheint, unumstösslichen Regeln des Zählens ist das Verbot, denselben Gegenstand mehrfach zu zählen; ist er einmal ins Lager der gezählten überführt worden, gibt es – wie beim Übergang vom Leben in den Tod – kein Zurück mehr. Sie gibt den Takt vor, nach dem sich Zählungen zu richten haben. (Man könnte freilich jeden Gegenstand zweimal zählen und die so gewonnene Anzahl in zwei gleich dicke Tranchen teilen; der Übergang ins Lager der (zu Ende) gezählten fände dann erst eigentlich in der zweiten Zählung statt.) Daneben gibt es Regeln, die, so scheint mir, zur Feinkalibrierung des Zählmechanismus gehören und sich je nach Vorliebe oder Anwendungszweck umjustieren lassen. Ethnographisch belegt ist etwa das Vorkommen von paarweisem Zählen;[55] dabei wechseln entgegen der Regel (4) zwei Gegenstände auf einmal, d. h. bei nur einsprossigem Vorrücken auf der Zählzeichenleiter, ins Lager der gezählten. Eine solche Zählweise erfordert vom angewandten Zeichensystem indes das Vorhandensein eines zweiten Grundzeichens, um Mengen, die sich vollständig in Paare zerteilen lassen, von solchen, bei denen stets ein ungepaartes Element übrig bleibt, zu unterscheiden; sie könnte deshalb als Triebfeder für die Weiterentwicklung der Strichnotation gewirkt haben.

Das nun entworfene Bild des Zählens würde von einigen wohl als mechanistisch abgetan werden, zumal es darin so dargestellt ist, als könne dessen Ausführung durchaus an seelenlose Maschinen übergeben werden. Ich würde das Bestehen dieser Möglichkeit jedoch keinesfalls in Abrede stellen, sondern als Ausgangspunkt einer Frage nehmen, der in einer anderen Arbeit nachgegangen werden müsste – der Frage nämlich, wie jener über

[54] Die Angaben sind dem *Gemoll* und dem griechisch-deutschen Online-Wörterbuch von *Pons* entnommen.
[55] Vgl. Seidenberg (1962, S. 8), Lévy-Bruhl (1910, S. 220).

den rein mechanischen Umgang mit Zählzeichen hinausführende Gebrauch derselben als aus ebendiesem Umgang hervorgehend zu denken sei. Die Frage, um die es gleich gehen wird, ist indes eine ganz andere. Nachdem sich im letzten Paragraphen erwiesen hat, dass nicht alles, was sich zählen lässt, auch nummerierbar ist, stellt sich natürlich die Frage, wie umfassend das Gebiet des Zählbaren selbst ist. Es soll nun also der Frage nachgegangen werden, was sich alles zählen lässt und – falls es ausserhalb dieses Gebiets überhaupt etwas gibt – welche Bedingungen vonseiten der abzuzählenden Vielheit erfüllt sein müssen, damit sie abgezählt werden kann.

II Was sich unter welchen Umständen zählen lässt

Das Gebiet des Unzählbaren

§ 14 Was sich alles zählen lässt, lässt sich schwerlich unter eine Gattung bringen. Denn nebst Schafen, Rindern und allerlei anderem Getier zählen wir auch Unbeseeltes, Kokosnüsse und Muschelschalen, ebenso Brötchen und Münzen, und von alledem manchmal nur bestimmte Teile, manchmal aber ganze Gruppen oder Arten, Familien und Stämme; andere wiederum halten Buch über die Liebschaften, denen sie heimlich nachgegangen sind, oder über die Länder, die sie bereist haben, und wieder andere zählen die Tage, die seit einem bestimmten Ereignis vergangen sind oder ihnen bis zu einem solchen bleiben, während sich manche erst erleichtert fühlen, wenn sie aufgezählt haben, was sie Gutes getan und Unrechtes erlitten haben in ihrem Leben. Fernerhin werden in Büchern nicht nur Seiten und Zeilen oder Kapitel und Absätze gezählt, sondern nach je verschiedenen Zählweisen Sätze, Wörter, Silben und Buchstaben, ebenso in Partituren Sätze, Phrasen, Takte und Noten; auf manch einem Bild sind Gestalten in bestimmter Zahl zu sehen und manch eine Erzählung handelt von soundso vielen Figuren; zählen lassen sich schliesslich auch mathematische Gebilde wie Potenzmengen, abelsche Gruppen oder asymmetrische Graphen von gegebener Ordnung.

Dem Gebiet des Zählbaren scheinen also keine Grenzen gesetzt zu sein; es erstaunt daher nicht, diesen Worten in Freges *Grundlagen der Arithmetik* zu begegnen:[56]

> Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?

Wenn aber das Gebiet des Zählbaren alles Denkbare umfasst, kann dann nichts Unzählbares gedacht werden? Russell verneint die Möglichkeit, wenn er in jenem Frühwerk, aus dem bereits zuvor (in § 8) zitiert wurde, mit dann doch erstaunlicher Unbekümmertheit annimmt, dass jeder mögliche Gegenstand des Denkens als Eines gezählt werden könne:[57]

> Whatever may be an object of thought, or may occur in any true or false proposition, or can be counted as *one*, I call a *term*. This, then, is the widest word in the philosophical vocabulary. I shall use as synonymous with it the words unit, individual, and entity. The first two emphasize the fact that every term is *one*, while the third is derived from the fact that every term has being, *i.e. is* in some sense.

[56] *GA*, § 14.
[57] Russell (1903, S. 43); das zweite Zitat findet sich auf S. 71.

Dass Russell die disjunktiv verknüpften Bestimmungen für austauschbar hält, geht aus einer anderen Stelle noch unmissverständlicher hervor: «*A* and *B* may be any conceivable entities, any possible objects of thought, they may be points or numbers or true or false propositions or events or people, in short anything that can be counted.» Demnach wäre nicht nur alles Denkbare, sondern auch jedes Seiende als eines zählbar, und die perennische Konvertibilität der transzendentalen Bestimmungen *ens* und *unum* wieder hergestellt.

Wenn nun alles, was ist, gezählt werden kann, dann sollte ich doch in der Lage sein, alles, was jetzt vor mir auf dem Tisch liegt – ein Kugelschreiber, verstreute Zettel, einige Bücher und ein halbleeres Wasserglas –, zu zählen. In der Tat könnte ich rasch damit beginnen, den Kugelschreiber als erstes zu zählen, um danach gleich die verstreuten Zettel einzusammeln; dieser eine Kugelschreiber jedoch lässt sich, wie ich weiss, in sieben Teile auseinanderschrauben, weshalb sich zunächst die Frage aufdrängt, ob diese einzeln und zusätzlich zum zusammengesetzten Schreibgerät gezählt werden sollen oder nicht. Ein Pragmatiker würde die Frage vielleicht beiseite schieben und dort, wo er sich sicher fühlt, mit dem Zählen fortfahren; bestenfalls wäre das Problem damit auf später verschoben, zumal eine Zählung erst dann endet, wenn alles, was es zu zählen galt, auch gezählt ist. Um die Zählung beenden zu können, muss ich also wissen, ob die Teile einzeln zu zählen sind und, falls ja, ob zusätzlich der ganze Kugelschreiber als Eines gezählt werden soll oder nicht; immerhin muss ich darauf achten, nichts Unbeabsichtigtes zu zählen. Nicht unähnliche, dafür umso entmutigendere Schwierigkeiten sähe ich alsdann in Anbetracht der aufliegenden Bücher auf mich zukommen. Unter anderem wäre hier die Frage anzugehen, ob die beiden Exemplare der *Logisch-philosophischen Abhandlung* getrennt zu zählen sind und das eine Werk, dessen Exemplare sie beide sind, als drittes noch dazu; weiter müsste darüber entschieden werden, ob auch die vielen Seiten, aus denen jedes Buch zusammengebunden – oder bedauerlicherweise: -geklebt – ist, einzeln und ob Vorder- und Rückseite getrennt zu zählen sind; dann ob die darauf abgedruckten (und mit Nummern versehenen) Bemerkungen und Absätze ebenso wie die Sätze, Wörter, Silben und Buchstaben, aus denen diese sich zusammensetzen, je einzeln zu zählen sind, und, falls ja, ob jedes einzelne Vorkommen eines Wortes, einer Silbe, eines Buchstabens oder jedes vorkommende Wort, jede vorkommende Silbe, jeder vorkommende Buchstabe nur einmal oder gar beides – Vorkommnisse und Typen – nacheinander gezählt werden soll.

Das Problem, welches all diese Fragen aufwerfen, besteht nicht eigentlich darin, dass sich die erwogenen Zählungen an sich nicht aus- und zu Ende führen liessen, sondern darin, dass der ursprünglichen Vorgabe nicht zu entnehmen ist, welche darunter ich nun tatsächlich auszuführen und welche ich zu unterlassen habe(; und lautete die Antwort: „Alle!" – wie könnte ich da entscheiden, ob nicht eine vergessen gegangen ist?) Nur schon deshalb wäre es mir unmöglich, der Aufforderung, alles zu zählen, was jetzt vor mir auf dem Tisch liegt, ohne weiteres Folge zu leisten. Auf ein Problem anderer Art hingegen brächte mich die einfache Einsicht, dass zu dem, was vor mir auf dem Tisch liegt, nebst den Buchseiten und Zetteln auch das Material, aus dem sie beschaffen sind, gehört. Dafür, dieses Material getrennt von dem, wozu es gerade geformt wurde, zu betrachten, spricht vor allem die Möglichkeit, demselben Material in einer anderen Erscheinungsform – z. B. als Zettel und nicht mehr als Buchseite – wieder zu begegnen. Wie aber könnte ich Papier zählen? Nun, ich könnte zunächst damit beginnen, die auf dem Tisch liegenden Papier*stücke* zu zählen und käme dabei auf dieselbe Anzahl wie bei der Zählung der Zettel und Buchseiten. Im Gegensatz zu einer Buchseite aber kann ein Stück Papier in viele Fetzen gerissen werden, ohne dass einer dieser Fetzen aufhören würde, Papier zu sein; und auch nachdem alles Papier auf dem Tisch in Fetzen gerissen worden wäre – es läge noch immer dieselbe Papiermasse, dieselbe abzuzählende Vielheit vor mir, nur würde die neuerliche Zählung der Papierstücke diesmal ein anderes Ergebnis zeitigen; fernerhin hätte dasselbe Papier in andere, z. B. feinere Fetzen zerteilt werden können. Ebenso verwirrend erscheint die Forderung im Hinblick auf das halbleere Wasserglas, dessen Inhalt sich auf derart unbestimmbar viele und willkürliche Weise portionieren liesse, dass an ein Zählen wahrlich nicht zu denken ist.

Entgegen aller ewigen Philosophie scheinen dem Gebiet des Zählbaren auf einmal doch Grenzen innerhalb des Seienden gesetzt zu sein; denn dass Wasser etwas und nicht nichts ist, scheint mir kaum bestreitbar. Wenn nun aber nicht alles, was ist, und somit nicht alles, was Gegenstand des Denkens sein kann, zählbar ist, dann stellt sich die Frage, wo die Grenze zwischen dem Zählbaren und dem Unzählbaren verläuft. Die Sprache erweist sich bei diesem Unterfangen als gar keine so schlechte Führerin.

§ 15 Frege würde sicherlich darauf hinweisen, dass einem Zählenden mit der Aufforderung, das jetzt vor ihm auf dem Tisch Liegende zu zählen, der «Gegenstand seiner Untersuchung noch nicht vollständig gegeben»[58] sei, und dem wohl anfügen, dass es zu ihrer Vervollständigung der Angabe eines (anderen) Begriffs bedürfe. Tatsächlich wäre ihm ein Begriff, der solches leistet, etwa mit dem Wort ‚Buch' gegeben; so wüsste er bereits besser, was er zu zählen und was er nicht – keine Seiten, Bemerkungen o. dgl. – zu zählen hat. Die dem Wort innewohnende Mehrdeutigkeit liesse sich, um auch noch die letzte Unsicherheit zu beseitigen, zudem durch das Anhängen des Wortteils ‚-exemplar'

[58] *GA*, § 22.

aufheben. Der Zählende wüsste sodann, was er als eines zu zählen hat, und, da es sich um einen komplexen Gegenstand handelt, mithin dass die einzelnen Bestandteile, aus denen dieser zusammengesetzt ist, nicht zusätzlich gezählt werden dürfen. Beendet wäre die Zählung schliesslich, wenn alles, was ein Buchexemplar ist und zu besagter Zeit vor ihm auf dem Tisch lag, einmal gezählt ist. Begriffe, die solches leisten, will ich Zählbegriffe nennen. Ein Zählbegriff zeichnet sich also dadurch aus, dass er dem Zählenden etwas an die Hand gibt, woran sich entscheiden lässt, was als Eines und was nicht als Eines zu zählen ist. Ein Zählbegriff, werden wir sagen, enthalte wesentlich ein Prinzip der Einheit.

Wo die Angabe eines Zählbegriffs die einzige fehlende Zutat dafür ist, etwas zählen zu können, liegt der Grund für das festgestellte Fehlen von Zählbarkeit offenbar nicht in der Sache selbst – einer Sache, die dem hypothetischen Gebiet des Unzählbaren hätte zugeschlagen werden müssen –, sondern vielmehr in der fehlenden Wahl eines für das Zählen geeigneten Begriffs (oder der erfolgten Wahl eines ungeeigneten), letztlich also in der Weise, wie das zu Zählende aufgefasst wird. Die Wahl des Begriffs, und somit der Auffassungsweise, ist aber ein Akt der Willkür, zumal dort, wo mit gleichem Recht verschiedene Zählbegriffe anwendbar sind. Gerade ein solcher Fall liegt in der geschilderten Situation vor; ich hätte – um es mit Frege zu sagen – ‹in Ansehung derselben äussern Erscheinung›[59] die vor mir liegende Sache mit gleichem Recht als ein Buch, als zwei Exemplare desselben, als je 103 Seiten oder 526 Bemerkungen auffassen können. Dennoch verhält es sich nicht so, als stünde dem Zählenden eine homogene Seinsschmelze gegenüber, die er nach Belieben zerteilen und wieder zusammenfügen könnte; der Willkür sind durchaus enge Grenzen gesetzt, und zwar in zweifacher Hinsicht. Erstens hat der gewählte Begriff auf die durch ihn betrachtete Sache anwendbar zu sein, d. h. sein Zeichen muss von der ihm gemäss aufgefassten Sache wahr ausgesagt werden; und ist ein anwendbarer Zählbegriff einmal gewählt, ist das Ergebnis der Zählung kein willkürliches, sondern einerseits durch die Regeln des Zählens, andererseits und vor allem aber durch die tatsächlichen Ausmasse der Sache selbst festgelegt. Obschon Frege der Willkür durchaus den ihr gebührenden Platz im Auswahlverfahren zu gewähren weiss, ist er sich ihrer Grenzen sehr bewusst, wenn er einschränkend (und sinngemäss) bemerkt, es könne ‹in Ansehung derselben äussern Erscheinung *mit derselben Wahrheit*› (meine Kursivsetzung) gesagt werden: „dies ist ein Buch“ und „dies sind 526 Bemerkungen“;

[59] *GA*, § 46. Freges Beispiele sind die Ilias, welche «als Ein Gedicht, als 24 Gesänge oder als eine grosse Anzahl von Versen» (§ 22) aufgefasst werden könne, ein Pack Spielkarten (§ 22), Bäume und Heeresteile (§ 46). An dem zugeschlagenen Exemplar der Ilias sind von aussen zwar die Seiten und Verse, aus denen sie zusammengesetzt ist, nicht sichtbar; indes darf beim Durchblättern, wo diese erst zum Vorschein kommen, an der Auffassung des Ganzen als eines Buchs durchaus festgehalten werden.

ebenso, wo er klarstellt, dass der Botaniker «etwas ebenso Thatsächliches sagen» wolle, «wenn er die Anzahl der Blumenblätter einer Blume, wie wenn er ihre Farbe angiebt.»[60]

Im ersten Hinblick auf den flüssigen Inhalt meines Wasserglases liegt wiederum die Vermutung nicht fern, der Grund für die Unzählbarkeit sei nicht in der Sache selbst, sondern in der Wahl eines ungeeigneten Begriffs zu verorten. Demnach würde das Wort ‚Wasser', das sich ja nur in sehr seltenen Fällen mit Zahlwörtern paaren lässt – und dann zumeist in Bedeutungen wie ‚Gewässer', ‚Wassersorte' oder noch ‚Wasserflasche' gebraucht wird –, dem Zählenden einen mangelhaften Begriff übergeben;[61] für die nötige Ergänzung würde sodann ein Wort wie ‚Glas', ‚Portion' oder ‚Liter' sorgen, das dem Massenterm voranzustellen wäre, um mit ihm einen Term zu bilden, der einen geeigneten Zählbegriff mit sich bringt. Aber wäre es, wenn dies zuträfe, nicht naheliegender, die Unterteilung in Begriffe, die sich für das Zählen eignen, und in solche, die dafür ungeeignet sind, als Ergebnis einer Täuschung, verursacht durch einen sprachlichen Mangel, anzusehen und hernach aufzugeben? Eine Tatsache, die Philosophen spätestens seit Quines Aufsatz ‚Ontological relativity' bekannt sein dürfte, scheint zudem weitere Unterstützung zu bieten. Die Verbindung von Zahlwort und Nomen erfordert im Japanischen den vermittelnden Einsatz sogenannter Klassifikatoren (*classifiers*), deren Funktionsweise sich gemäss Quine auf zwei verschiedene Weisen erklären lasse.[62] Der zweiten Erklärung nach fügt sich der Klassifikator an das Nomen, um mit ihm einen komplexen „Zählterm" – Quine spricht von einem ‹composite individuative term› – zu bilden, wohingegen es sich bei dem alleinigen Nomen, das den Einsatz des Klassifikators erfordert, – u. a. also bei den Wörtern für ‚Ochse' oder ‚Buch' – nicht etwa, wie im Deutschen oder Englischen, um einen Zähl-, sondern um einen Massenterm handelt, der, so Quine, die nicht-individuierte Gesamtheit der Sachen abdecke, auf die er anwendbar ist. Sollte sich indes bewahrheiten, dass alle generellen Terme des Japanischen in Verbindung mit Zahlworten stets den Einsatz eines Klassifikators erfordern, wäre in ihr dann nicht eine Sprache gefunden, die den vermeintlichen Unterschied zwischen Zähl- und Massenbegriffen überhaupt nicht anzeigt?

Hierzu gilt es erstens festzuhalten, dass Japanisch diesbezüglich keinesfalls eine Ausnahme bildet; Klassifikatoren werden in vielen Sprachen eingesetzt.[63] Zweitens ist die Annahme, wonach in der Zugehörigkeit zu einer dieser Klassifikatorsprachen ein hinreichender Grund für das Fehlen der Unterscheidung von Zähl- und Massentermen (auf

[60] *GA*, § 26.
[61] Im Deutschen gibt es Wörter, deren Plural noch seltener oder gar nicht vorhanden ist. Beispiele sind: ‚Schmuck', ‚Wäsche', ‚Obst', ‚Milch', ‚Fleisch', ‚Eis'.
[62] Vgl. Quine (1969a, S. 35-7).
[63] Vgl. Aikhenvald (2006, S. 466), Doetjes (2012, S. 2562-4).

lexikalischer Ebene) zu sehen sei, alles andere als unbestritten; gerade in Bezug auf das Japanische wurden starke Argumente für die Existenz dieser Unterscheidung vorgebracht.[64] Was ferner die vermutete Analogie zwischen Klassifikatoren und jenen Wörtern anbelangt, mit denen auch im Deutschen Massenterme ergänzt werden können, müsste zuallererst auf gewichtige Unterschiede im syntaktischen Verhalten hingewiesen werden, welche eindeutig Quines erste Erklärung begünstigen, derzufolge der Klassifikator als ein an das Zahlwort gebundendes Morphem auftritt.[65] Diese Entgegnungen sollen jedoch keineswegs implizieren, dass die Unterscheidung von Zähl- und Massentermen unproblematisch sei; sie ist, ganz im Gegenteil, höchst problematisch, allerdings würde uns eine tiefergehende Behandlung der vielen aporetischen Probleme, die sie aufwirft, zu weit von dem eingeschlagenen Weg abbringen, weshalb im Folgenden nur einige wenige darunter gestreift werden können.[66]

Den Kritikern einer Unterscheidung von Zähl- und Massenbegriffen muss gewiss zugestanden werden, dass nicht alles, wovon ein Massenterm wahr ausgesagt wird, unzählbar ist. Jenes Ritual aus Oran, von dem zuvor (in § 5) berichtet wurde, sieht die Zählung von Korn vor; ‚Korn' indes verhält sich in syntaktischer Hinsicht nicht anders als der paradigmatische Massenterm ‚Wasser', was sich beispielhaft daran erkennen lässt, dass nach erfolgter Zählung grammatisch durchaus korrekt ausgerufen werden könnte: „Nun, da *viel* Korn abgezählt worden ist, sei *alles* Korn in sieben Haufen zerteilt und jedem nach seiner Abstammung aus einem der Haufen *etwas* davon abgegeben"; Konstruktionen mit ‚viele Korn' oder ‚drei Korn' sind dagegen ungrammatisch.[67] Übereinstimmung herrscht auch in semantischer Hinsicht. ‚Korn' teilt sich mit anderen Massentermen die von Quine

[64]Vgl. Watanabe (2006, S. 267-74), wo weitere Gleichgesinnte aufgeführt sind; vgl. auch Doetjes (2012), wo zudem auf diesen wichtigen Aspekt hingewiesen wird: «In many classifier languages there is one classifier that functions as a general classifier, which is semantically bleached and tends to combine with a large set of nouns in the language» (S. 2563).

[65]Yamamoto schreibt hierzu: «In oversimplified pedagogical treatments, numeral classifier constructions are frequently introduced as basically equivalent to English measure phrases denoted as ‚two sheets of paper' or ‚three heads of lettuce.' In fact, this characterization is misleading and stems from a misidentification of very different phenomena. It is significant to note that in a numeral classifier phrase, the numeral and classifier are always adjacent and form a syntactic constituent without any element intervening between them, whereas in an English measure phrase, a numeral and measure word can be separated by an adjective or other modifiers» (Yamamoto (2005, S. 2)). Gemeint sind Syntagmen wie ‚drei *grosse* Gläser Wein'.

[66]Vgl. für eine Übersicht Koslicki (2006).

[67]Vgl. Krifka (1991, S. 399). Mit ‚viele Körner' und ‚drei Körner' lassen sich durchaus grammatische Konstruktionen bilden, nur hat die Pluralform von ‚Korn' hier eine andere Bedeutung; es sind entweder einzelne Körner, also die elementaren Bestandteile dessen, wofür ‚Korn' in der obigen Verwendung zusammenfassend steht, gemeint oder aber verschiedene Sorten von Korn (sog. Sortenlesart). Einen Spezialfall scheint mir das Kompositum ‚Dreikornbrot' zu bilden. Gelegentlich ist auch die syntaktische Verbindung von Zahlwort und Massenterm im Singular möglich, so z. B. in ‚Sie trank fünf Bier an diesem Abend' (sog. Portionenlesart). Vgl. hierzu Dudenredaktion (2009, S. 172 f).

herausgestrichene Eigenschaft, kumulativ zu referieren: Jede Summe von Teilen, die für sich betrachtet Korn sind, ist selbst wiederum Korn.[68] Gleiches gilt für eine ganze Reihe anderer Wörter, darunter ‚Reis', ‚Sand' und ‚Vieh', aber, wie Laycock zu Recht betont, eben auch – zumindest in Bezug auf das Kriterium der kumulativen Referenz – für die Pluralform von Zähltermen, also für ‚Reiskörner' und ‚Schafe'.[69] Aus der Vereinigung zweier Vielheiten von Schafen geht wiederum eine Vielheit von Schafen hervor.

Ein anderes semantisches Kriterium, das „reine" Massenterme wie ‚Wasser' nicht nur gegen Terme wie ‚Vieh', sondern zugleich auch gegen Zählterme im Plural abgrenzen könnte, findet sich bei Frege:[70]

> Wir können z. B. das unter den Begriff des Rothen Fallende in mannigfacher Weise zertheilen, ohne dass die Theile aufhören, unter ihn zu fallen. Einem solchen Begriffe kommt keine endliche Zahl zu.

In der Tat erlaubt das unter den Begriff ‚Vieh' Fallende keine beliebige Zerteilung; von einem oder mehreren Schafsköpfen zu sagen, dies sei Vieh, wäre schlicht falsch. Wie aber verhält es sich mit dem Begriff ‚Wasser'? Wir sind sicherlich bereit, jeden noch so kleinen von Auge sichtbaren Tropfen aus dem Wasserglas als Wasser anzusehen; andererseits dürfte nicht wenigen bekannt sein, dass Wasser letztlich aus Molekülen besteht, deren Teile für sich genommen kein Wasser sind.[71] Soweit nun diese wissenschaftliche Erkenntnis in die Bedeutung des Terms ‚Wasser' einfliesst, gleicht er sich dem semantischen Verhalten von ‚Vieh' an. Im normalen Sprachgebrauch wird indessen auch jene Flüssigkeit, die aus unseren Wasserhähnen quillt, als Wasser bezeichnet, obschon es sich dabei nicht um eine reine, einzig aus durch instabile Wasserstoffbrücken lose miteinander verbundenen H_2O-Molekülen bestehende Flüssigkeit handelt. Ausserdem sind wir ohne weiteres in der Lage, uns mit Menschen, denen die molekulare Struktur von Wasser unbekannt geblieben ist, in vielerlei Hinsicht über jene Flüssigkeit zu unterhalten, ohne je in Verständnisschwierigkeiten zu geraten. Der gewöhnliche Gebrauch von ‚Wasser' gleicht also eher jenem von ‚Holz' oder ‚Schlamm', deren Bedeutungen keine vergleichbare Präzisierung durch die Chemie erfahren haben. Obzwar auch jedes Schlammvorkommen letztlich aus irgendwelchen Atomen in diversen Verbindungen besteht, ist es unmöglich, aufgrund der Bedeutung von ‚Schlamm' zu entscheiden, wo die Teile des Vorkommens aufhören Schlamm zu sein.[72] Ich gehe also mit Krifka einher, dass «[i]n der Semantik der

[68] Vgl. Quine (1960, S. 91).

[69] Vgl. Laycock (2006, S. 536), auch Krifka (1991, S. 406).

[70] *GA*, § 54.

[71] Vgl. Quine (1960, S. 98). Auch in Freges Beispiel kommt das Zerteilen physikalisch irgendwo an ein Ende, dort nämlich, wo die betrachtete Oberfläche zu klein wird, um rotes Licht zu reflektieren.

[72] Gleiches scheint mir auch in Bezug auf ‚Holz' zu gelten, obwohl sich der chemische Aufbau dessen, was wir Holz zu heissen pflegen, sicherlich spezifischer angeben lässt, als bei Schlamm.

natürlichen Sprache» kein «atomares [...] Weltbild ‚eingebaut'» ist, das die Bedeutung von ‚Wasser' und sich ähnlich verhaltenden Wörtern auf die Existenz kleinster Teile hin festlegen würde.[73]

§ 16 Die Tatsache, dass sich in die Bedeutung von ‚Wasser' neues Wissen über die molekulare Struktur jener Flüssigkeit einbauen liess, ohne die vorwissenschaftliche Verwendung des Wortes zu verdrängen, zeigt, dass die alte (und nach wie vor gebräuchliche) Bedeutung keine endlose Teilbarkeit impliziert – dass sie also, um wiederum Krifkas Worte zu bemühen, die ‹Frage der Atomarität› offen lässt.[74] (Nebenbei gesagt, ist hier eine gewisse Affinität zu Quines Mutmassung erkennbar, wonach Massenterme Relikte einer ‹pre-individuative phase in the evolution of our conceptual scheme› seien.[75]) Künstlich beschränkt auf seine chemische Bedeutung, verhält sich ‚Wasser' freilich nicht anders als ‚Vieh'; wie letzteres durch die Beifügung von ‚Stück' lässt sich ersteres durch die Beifügung von ‚Molekül' zu einem Term ergänzen, der einen Zählbegriff mit sich bringt. Weshalb aber sollte Vergleichbares nicht auch in Bezug auf das vorwissenschaftlich verwendete Wort möglich sein, indem es, wie bereits vorgeschlagen, zum Beispiel durch die Behälterbezeichnung ‚Glas' oder die Massangabe ‚Zentiliter' ergänzt würde? Es ist doch ein Verfahren zur Ermittlung der Anzahl Zentiliter Wasser in meinem Glas durchaus denkbar: Man behändige sich dazu eines Gefässes von entsprechendem Ausmass, fülle es vollständig mit Wasser aus dem Glas, leere das abgefüllte Wasser in ein anderes und wiederhole dies, bis das erste Glas kein Wasser mehr enthält. Ist, sofern man sich das Emporsteigen entlang der Zählzeichenreihe daran gekoppelt hinzudenkt, hiermit etwa kein Zählverfahren beschrieben? Immerhin ist durch den Gebrauch desselben Gefässes und das Wegleeren der einmal abgefüllten Zentiliter Wasser sichergestellt, dass nicht mehr als eine Ladung auf einmal und keine zweimal gezählt wird; zudem ist das Ergebnis einer derartigen Handlung kein willkürliches, sondern durch die Regeln des Verfahrens und die tatsächlichen Ausmasse des vorhandenen Wassers festgelegt.

Gleichwohl ist die Frage zu verneinen und die Einsicht festzuhalten, dass an der Unzählbarkeit von Wasser im normalsprachlichen Sinne auch die Zuhilfenahme von Massgefässen nicht zu rütteln vermag. Zugänglich ist diese Einsicht zunächst vielleicht nur

[73] Krifka (1991, S. 405).

[74] Einen ähnlichen, wenn auch leicht differenzierteren Gedanken drückt Laycock aus, wo er schreibt: «no such object-involving concepts enter into the meanings of the group (c) terms», worunter u. a. ‚Wasser' als Beispiel aufgeführt ist (Laycock (2006, S. 537)). Unter ‚object' fasst er nebst atomaren Gegenständen auch diskrete Partikel, die sich, wie Schneeflocken oder Sandkörner, zerreiben oder zermalmen lassen, ohne dass dadurch die aus ihnen bestehende Vielheit aufhören würde, dieselbe zu sein (ganz im Gegensatz zu einer Viehherde, deren Identität den Gang zum Metzger nicht überdauert).

[75] Quine (1969a, S. 24).

über die noch unbestimmte Intuition, wonach das beschriebene Verfahren in stärkerem Masse auf Konventionen beruhe als das Zählen. Es scheint, als habe die Sache selbst, das Wasser also, überhaupt keinen Anteil daran, was als Eines gezählt würde, wohingegen bei einer Viehherde das Mass dem Zählenden gleichsam durch äussere Gegebenheiten aufgezwungen werde. Dabei darf natürlich nicht vergessen gehen, dass auch Zählungen von Willkür und Konvention geprägt sind. Die Wahl des Zählbegriffs enthält durchaus ein Moment der Willkür; und, wie das Vorkommen von paarweisem Zählen deutlich macht, ist gerade jener Regel des Zählens ein gewisser Gestaltungsfreiraum gelassen, nach der immer nur ein Gegenstand auf einmal ins Lager der gezählten zu überführen sei. Nebst aller Willkür und Konvention jedoch leistet der Zählbegriff etwas, wozu ein Term wie ‚Zentiliter Wasser' dem Zählwilligen das Nötige nicht in die Hand zu geben vermag. Denn der Zählbegriff – oder wie es Frege sagt: «der Begriff, dem die Zahl beigelegt wird»[76] – grenzt, um gleich mit ihm fortzufahren,

> im Allgemeinen das unter ihn Fallende in bestimmter Weise ab. Der Begriff ‚Buchstabe des Wortes Zahl' grenzt das Z gegen das a, dieses gegen das h u. s. w. ab. Der Begriff ‚Silbe des Wortes Zahl' hebt das Wort als ein Ganzes und in dem Sinne Untheilbares heraus, dass die Theile nicht mehr unter den Begriff ‚Silbe des Wortes Zahl' fallen. Nicht alle Begriffe sind so beschaffen.

Obschon eine unter den Begriff ‚Zentiliter Wasser' fallende Ladung insofern unteilbar ist, als keiner ihrer echten Teile selbst wieder unter den Begriff fällt, erfolgt die Abgrenzung nicht in der Weise eines Zählbegriffs. Verschiedene Zentiliter Wasser können Teile gemeinsam haben; so ergibt die Hälfte eines Zentiliters Wasser zusammen mit der Hälfte eines ganz anderen Zentiliters Wasser einen weiteren Zentiliter Wasser. Da der Teilbarkeit von Wasser zudem keine begrifflichen Grenzen gesetzt sind, scheidet jeder noch so kleine Tropfen eines Zentiliters Wasser diesen von einem anderen. Folglich lässt sich der Inhalt des Wasserglasses auf unbestimmbar viele Weisen in einzelne, teils sich überschneidende und doch voneinander verschiedene Zentiliter portionieren. Das Wegleeren der einmal abgefüllten Wasserladungen beschränkt, indem es Überschneidungen zwischen ihnen verhindert, die ungeheure Vielzahl an verschiedenen Zentiliterportionen auf ein handhabbares Mass.[77]

---

[76] *GA*, § 54.

[77] Die (extrinsische) Eigenschaft eines Gegenstands, sich nicht mit anderen zu überlappen, nennt Krifka seine Diskretheit und führt sie als notwendige Bedingung der Zählbarkeit an (vgl. Krifka (1991, S. 406)). Weiter unten (siehe § 23) werden indes Beispiele angeführt, die Krifkas Behauptung widerlegen; Diskretheit ist weder notwendige noch hinreichende Bedingung der Zählbarkeit. Laycock unterscheidet ‹discrete and continuous quantity›, wobei er zwar behauptet, es handle sich nicht um eine unmittelbar ontologische Unterscheidung, ihr aber dennoch zugesteht, ‹the possibility of certain ontic contrasts› zu enthalten (Laycock (2006, S. 537)).

Wasser lässt sich deshalb auf derart viele Weisen in verschiedene Portionen zerstückeln, weil die Zerstückelung – anders als bei Viehherden o. dgl. – keinen vorgezeichneten Linien zu folgen hat, ja es nicht einmal könnte, da überhaupt keine vorhanden sind. Es kann der Schnitt zwischen Portionen, wenn nur die Ausmasse stimmen, überall angebracht werden. Was die stimmigen Ausmasse sind, bestimmt das Mass, dessen Wahl indes der Willkür wiederum einiges anheimgibt. Denn ebenso gut liesse sich das Wasser, anstatt in Zentiliter, in Kubikzoll, Flüssigunze oder Shaku abfüllen (in Sekunden hingegen nicht). Egal aber welches Mass den Vorzug erhält, das zuletzt im Glas verbleibende Wasser wird – was mir das Ausschlaggebende scheint – das Massgefäss kaum jemals vollständig zu füllen vermögen. Um zwei Mengen auseinanderhalten zu können, die um weniger als das Fassungsvermögen des Massgefässes voneinander abweichen, zwingt sich dem Ausführenden daher die Anwendung gebrochener Zahlen auf. Hierin glaube ich den wesentlichen Unterschied zwischen dem eben beschriebenen Verfahren und denjenigen aus dem ersten Abschnitt dieser Arbeit erkannt zu haben, jenen Unterschied also, der das Zählen von anderen Formen des Messens – vom Messen im engeren Sinne – abhebt. In diesem Licht erscheint paarweises, oder allgemeiner: k-weises, Zählen nun als so etwas wie das Bindeglied zwischen Zählen und Messen im jeweils engeren Sinne. Nicht nur als Triebfeder für die Weiterentwicklung der Strichnotation könnte es daher gewirkt haben (siehe § 13), sondern auch für die Entwicklung von Bruchnotationen.[78]

Von hier betrachtet nimmt sich die Behauptung, wonach es nichts Unzählbares gebe, ja solches nicht einmal gedacht werden könne, ziemlich haltlos aus. Offenbar gibt es Vielheiten um uns herum, die wir durchaus mit gutem Grund als unzählbare auffassen, und zwar unbeschadet dessen, ob letztlich alles in unteilbare und einer Zählung zugängliche Partikel zerfällt oder nicht. Es erstaunt daher nicht, in den allgemeinsten Termini des philosophischen Wortschatzes das Nebeneinander von Zählbarem und Unzählbarem vereinigt zu sehen. In syntaktischer Hinsicht verhält sich das Wort ‚Gegenstand' nicht anders als ein gewöhnlicher Zählterm; verbinden lässt es sich mit Zahlwörtern und dem Quantor ‚jeder'. Zugleich aber erfüllt ‚Gegenstand', obzwar kein Plural, das Kriterium der kumulativen Referenz: Jede Vereinigung von Gegenständen ist selbst wieder ein Gegenstand. Da sich Komplex und Bestandteile je teilweise überschneiden, kann daher der mit ‚Gegenstand' einhergehende Begriff – sofern ein solcher überhaupt zugegeben wer-

[78] Im Hinblick auf die Probleme, die sich im Zusammenhang mit der Unterscheidung von Zähl- und Massentermen ergeben, sehen sowohl Koslicki als auch Laycock den Ansatz über die Kontrastierung von Zählen und Messen i. e. S. als vielversprechend an. Koslicki muss indes einräumen, dass «[t]he area of counting [...] is still radically underexplored»; nach wie vor offen sei insbesondere die Frage, welche Bedingungen ein Begriff zu erfüllen habe, damit ihm – in Freges Worten – eine Anzahl beigelegt werden könne, d. h. damit das unter ihn Fallende zählbar sei (vgl. Koslicki (2006, S. 664)).

den soll – unmöglich das unter ihn Fallende in der Weise eines gewöhnlichen Zählbegriffs abgrenzen. Und trotzdem scheint er mir kein Massenbegriff, zumal er als sein Merkmal eine gewisse Vollendetheit oder Abgeschlossenheit der Sache impliziert. Für gewöhnlich würde nicht jeder noch so bruchstückhafte Teil eines Gegenstands selbst wieder als ein Gegenstand bezeichnet – ein Umstand übrigens, den sich Frege m. E. sehr geschickt zunutze gemacht hat, um den für ihn äusserst wichtigen Graben zwischen Begriff und Gegenstand zu ziehen. Wie auch immer sich die normalsprachliche Intuition diesbezüglich verhält, in philosophischen Zusammenhängen wird der Begriff mitunter merkmalsfrei angewandt, sodass er, wie etwa der vorwissenschaftliche Begriff des Wassers, beliebige Zerteilungen erlaubt.

Eine noch ausgeprägtere Zwitterhaftigkeit durchzieht den Term ‚Seiendes', der im Gegensatz zu ‚Gegenstand' kaum so etwas wie einen gewöhnlichen Gebrauch ausserhalb der Philosophie kennt. Denn einerlei wie unvollendet, bruchstückhaft oder vorübergehend sich irgend ein Teil eines Seienden darbieten sollte – er ist nicht nichts, also Seiendes. Und offenbar ist jede Vereinigung von Seiendem wiederum Seiendes. ‚Seiendes' übertrifft auch auf der syntaktischen Ebene seinen Konkurrenten, zumal das Wort, obschon ebenfalls mit Numeralia verbindbar, als singulärer Term, wie in ‚Seiendes ist von der Seinsart des Daseins', auftreten kann – ein archaischer Zug, den er sich mit ‚Wasser' und anderen Massentermen teilt.[79] Wo ‚Seiendes' als genereller Term auftritt, tut es dies als Massenterm, wie in dem obigen Satz über die Vereinigung von Seiendem, oder als Zählterm, wie in ‚Jeder Gegenstand ist ein Seiendes'.

Hinderungsgründe beim Zählen

§ 17 Nicht immer sind es die gleichen Gründe, die ein Zählen verhindern. Bei Wasser oder Schlamm ist es die Befolgung der vierten Zählregel, die prinzipielle Probleme bereitet, zumal es keinen Sinn ergibt zu fragen, was als ein Wasser und was als zwei zählt; manche Umstände wiederum können die Befolgung der dritten Regel verhindern, ohne zugleich die vierte zu betreffen. Um eine klarere Übersicht darüber zu erhalten, was alles eine Zählung verhindern kann, ist es daher unerlässlich, unterschiedliche Hinderungsgründe sorgfältig auseinanderzuhalten. Erst vor diesem Hintergrund werden die philosophisch interessanten Konturen des Zählbarkeitsbegriffs klar erkennbar.

Eine unheilvolle Vermengung, wie ich sie zu vermeiden suche, findet sich bei Geach ausgerechnet dort, wo er Freges Unterscheidung in Begriffe, denen eine Zahl beigelegt wird, und in solche, denen keine (endliche) Zahl zukommt, bespricht:[80]

[79] Vgl. Quine (1960, S. 97 ff).
[80] Geach (1980, S. 63).

> Frege said that only such concepts as ‹sharply delimited› what they applied to, so that it was not ‹arbitrarily divisible›, could serve as units for counting [...]. Frege cagily remarked that in other cases, e. g. ‚red things‘, no finite number was determined. But of course the trouble about counting the red things in a room is not that you cannot make an end of counting them, but that you cannot make a beginning; you never know whether you have counted one already, because ‚the same red thing‘ supplies no criterion of identity.

Dass sich mit dem Zählen mitunter nicht einmal beginnen lässt, steht ausser Frage; auf den aussichtslosen Versuch, den flüssigen Inhalt meines Wasserglases zu zählen, trifft dies sicherlich zu. Wenn mich dagegen jemand bitten würde, einen roten Gegenstand – oder ein rotes Ding – aus meinem Arbeitszimmer mitzubringen, wäre ich zwar ob der ungewöhnlichen Bitte erstaunt, hätte aber eine ziemlich klare Vorstellung davon, wie sich diese Bitte erfüllen liesse. Ich könnte ein rotes Buch aus meiner Bibliothek herausgreifen oder mich für den Stuhl, auf dem ich sitze, entscheiden; es fiele mir auch nicht weiter schwer, dieser Bitte mehrfach nachzukommen, und zwei, drei oder mehr rote Gegenstände aufzutreiben, um sie dem Bittsteller vorzulegen. Auf die neuerliche Bitte hin, die vorgelegten roten Gegenstände nun zu zählen, wäre die pragmatische Seite in mir gewiss nicht abgeneigt, jedes einzeln Herausgegriffene und Mitgebrachte als einen roten Gegenstand zu zählen und so zumindest einen Anfang zu machen. Der eigentliche Hinderungsgrund bestünde doch darin, dass die Zählung kein Ende hätte, und dies nicht, weil mehr als endlich viele rote Gegenstände vorlägen, sondern weil schlicht nicht entschieden werden könnte, was *alles* als Eines zu zählen ist. Es scheint also eher, als könne bei dem Versuch, die roten Gegenstände in einem Raum zu zählen, die erste Regel des Zählens nicht befolgt werden.

Was Geach dann, vermutlich in erklärender Absicht, der ersten Kritik an Frege beifügt, muss allerdings gerade jene verwirren, die ihm im ersten Punkt Recht geben wollten: Man wisse bei dem Versuch, die roten Gegenstände im Raum zu zählen, nie, ob man einen bereits gezählt habe. Dies muss, damit es sich mit dem ersten Punkt, wonach sich kein Anfang machen lasse, verträgt, wohl dahingehend verstanden werden, dass der Proband in Bezug auf (irgend)ein versuchsweise Weggelegtes nie wissen könne, ob er nun einen, keinen oder mehrere rote Gegenstände weggelegt habe. Geach aber begründet das fehlende Wissen des Probanden damit, dass der Ausdruck ‚derselbe rote Gegenstand‘ kein Identitätskriterium mit sich bringe, was eine andere Lesart der Beifügung nahelegt: Bei dem Versuch, die roten Gegenstände im Raum zu zählen, wisse man, nachdem der erste gezählt ist, nie, ob der nächste derselbe wie der erste und somit bereits gezählt sei. Die Einbeziehung dessen, was Geach im Anschluss daran über Identitätskriterien zu sagen hat, bestärkt diese zweite Lesart:[81]

[81] Geach (1980, S. 63 f).

> I maintain that it makes no sense to judge whether things are ‹the same›, or a thing remains ‹the same›, unless we add or understand some general term – ‚the same *F*'. That in accordance with which we judge whether identity holds I call a *criterion* of identity [...]. ‚The same *F*' does not express a possible way of judging as to identity for all interpretations of ‚*F*'. I shall call ‚substantival' a general term for which ‚the same' does give a criterion of identity. Countability is a sufficient condition for considering a term as substantival; this is so because we (logically) cannot count *A*s unless we know whether the *A* we are now counting is the same *A* as we counted before. But it is not necessary, in order that ‚the same *A*' shall make sense, for the question ‚How many *A*s?' to make sense; we can speak of the same gold as being first a statue and then a great number of coins, but ‚How many golds?' does not make sense; thus ‚gold' is a substantival term, though we cannot use it for counting.

Bevor sich dem Probanden die Frage überhaupt stellen kann, ob der nun vor ihm liegende rote Gegenstand derselbe rote Gegenstand sei wie der zuvor gezählte, muss er freilich mit dem Zählen schon begonnen haben. Oder anders gesagt: Erst wenn das Lager der gezählten Gegenstände nicht mehr leer ist, kommt die dritte Regel des Zählens zum Tragen.

Geachs Ausführungen erscheinen umso befremdlicher, als die darin vorgenommene Unterscheidung genereller Terme in solche, die er ‹substantival›, und andere, die er ‹adjectival› nennt, überhaupt nicht jener Freges entspricht. Zu den Begriffen, denen keine (endliche) Zahl zukommt, gehören gemäss Frege insbesondere all jene, die eine beliebige Zerteilung des unter sie Fallenden zulassen; deshalb führt er als Beispiel den Begriff des Roten an und nicht den Begriff ‚roter Gegenstand'. Ebenso gut hätte er hierfür ‚Schlamm' oder ‚Wasser' wählen können. Da Geach jedoch zugeben müsste, dass diese ein Identitätskriterium mit sich führen, hätte er, wie Koslicki in ihrem Aufsatz über Freges ‹two criteria for counting› zu Recht bemerkt, bei solchen Beispielen unmöglich dieselbe Kritik anbringen können.[82]

§ 18 Ein weitaus gewichtigeres Problem wirft die an zuletzt angeführter Stelle geäusserte Behauptung auf, wonach ein Zählender die unter einen bestimmten Begriff fallenden Gegenstände aus logischen Gründen nicht zählen könne, es sei denn, er wisse, ob der soeben herausgegriffene Gegenstand derselbe[83] sei wie der zuvor gezählte. Dem gilt es indes anzufügen, dass der Zählende ab dem zweiten Zählschritt sicherzustellen hat, dass dieser Gegenstand nicht allein von dem zuletzt gezählten, sondern zudem von allen anderen bis dahin gezählten Gegenständen verschieden sei. Im k-ten Zählschritt muss er also gemäss Geach wissen, ob der soeben herausgegriffene Gegenstand a derselbe sei

[82] Vgl. Koslicki (1997, S. 409).

[83] Es sei hier Geachs eigentümliche (und im ersten Satz jener angeführten Stelle bekräftigte) Auffassung der Identität, dergemäss sie niemals absolut, sondern immer relativ zu einem gegebenen generellen Term verstanden werden könne, aussen vor gelassen.

wie der im ersten Schritt gezählte Gegenstand a_1, ebenso ob er derselbe sei wie der im zweiten Schritt gezählte Gegenstand a_2 und Gleiches in Bezug auf alle weiteren bis hin zum letztgezählten, a_{k-1}. Jenes, demgemäss der Zählende über all dies urteilt, nennt Geach nun – einen Ausdruck gebrauchend, der bekanntlich aus Austins Übersetzung von Freges *Grundlagen* stammt – ein ‹criterion of identity›:[84]

> Wenn uns das Zeichen a einen Gegenstand bezeichnen soll, so müssen wir ein Kennzeichen haben, welches überall entscheidet, ob b dasselbe sei wie a, wenn es auch nicht immer in unserer Macht steht, dies Kennzeichen anzuwenden. In unserm Falle müssen wir den Sinn des Satzes
>
> > ‚die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist dieselbe, welche dem Begriffe G zukommt'
>
> erklären; [. . .]. Damit geben wir ein allgemeines Kennzeichen für die Gleichheit von Zahlen an.

> If we are to use the symbol *a* to signify an object, we must have a criterion for deciding in all cases whether *b* is the same as *a*, even if it is not always in our power to apply this criterion. In our present case, we have to define the sense of the proposition
>
> > ‚the number which belongs to the concept *F* is the same as that which belongs to the concept *G*';
>
> [. . .]. In doing this, we shall be giving a general criterion for the identity of numbers.

Demnach wäre unser Zählen also begleitet von einer stetig steigenden Anzahl an Urteilen, bei denen wir jedes Mal aufs Neue ein durch den Zählterm vorgegebenes Identitätskriterium zur Anwendung brächten, wobei dieses Kriterium, wenn darunter ein in Freges Sinn allgemeines Kennzeichen verstanden würde, zudem solcher Art zu sein hätte, dass es seinem Benutzer zumindest im Prinzip erlaubte, jeden unter den entsprechenden Zählbegriff fallenden Gegenstand, wie auch immer er sich ihm darbietet, als denselben und jeden anderen als einen verschiedenen zu erkennen. Da drängt sich natürlich die Frage auf, ob auch unser bescheidener Hirte von einem derart mächtigen Kriterium Gebrauch macht, wenn er seine Schafe zählt.

Nun gilt es erstens anzumerken, dass unser Hirte eben Schafe zählt und deshalb ein entsprechendes Kriterium für Schafe nötig hätte; Schafe aber sind ihrem Wesen nach etwas ganz anderes als Zahlen, als deren Kennzeichen zur Wiedererkennung Frege die Existenz einer beiderseits eindeutigen Zuordnung der betreffenden Begriffe angibt (siehe § 8). Welcher Art hätte aber eine Beziehung zu sein, deren Bestehen notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit bei Schafen ist, und zwischen was für Entitäten würde sie bestehen? Es scheint ohne weiteres klar, dass Identitätskriterien für Gegenstände mit einem Dasein in Raum und Zeit ziemlich anders ausfallen müssten als solche für Zahlen oder Richtungen. Wie dem auch sei, gilt es zweitens darauf hinzuweisen, dass Frege das Zuhandensein eines allgemeinen Kennzeichens für die Gleichheit bestimmter Entitäten als notwendige Bedingung dafür einführt, ihnen einen Namen ge-

[84] *GA*, § 62; *FA*, S. 73.

ben zu können. Unser Hirte aber braucht, um seine Schafe zu zählen, weder Namen noch stabile Kennzeichnungen – ja er müsste nicht einmal in der Lage sein, sie benennen zu können, wenn er es nur wollte (siehe § 11). Ohne einigermassen stabile Kennzeichnungen oder Namen für seine Schafe wird er jedoch jene Identitäten, die er gemäss Geach in jedem Zählschritt auf ihren Wahrheitswert hin zu beurteilen hätte, gar nicht erst artikulieren können. Wie soll er die Schafe im Stall denn auch einzeln ansprechen? Mit den angewandten Zählzeichen jedenfalls kann er, wie wir wissen, nicht auf sie zugreifen. Und wenn er, wie wir sagten, die Schafe, die er zählen will, nicht einzeln zu kennen braucht, wie könnte er da dieses ihm in dieser Weise gegebene Schaf als dasselbe wie jenes ihm in jener Weise gegebene überall wiedererkennen?

§ 19 Um ein geordneteres Bild davon zu erhalten, wie Zählbegriffe und mit ihnen einhergehende Kriterien oder Kennzeichen im Rahmen von Zählhandlungen funktionieren, lohnt es sich, rasch zu dem früheren Gedankenexperiment um Sortes und seinen Korb voller Äpfel (siehe § 12) zurückzukehren. Sortes, hatten wir gesehen, handelt auf unsere Aufforderung hin, die Äpfel in seinem Korb zu zählen, so, dass er einen Apfel aus dem vollen Korb herausgreift und ihn, alsbald er gezählt ist, in einen anderen Korb legt. Diesen Vorgang wiederholt er solange, bis keine Äpfel mehr in seinem Korb vorhanden sind. Davon lässt sich nun jenes Handlungsschema abziehen, das uns bei den weiteren Betrachtungen als Ausgangspunkt dienen wird.

Beim Abzählen einer Vielheit von unter einem Zählbegriff ‚A' fallenden Gegenständen greift der Zählende ein A aus dem Lager der noch ungezählten Gegenstände heraus und legt es in das Lager der bereits gezählten weg. Diesen Vorgang wiederholt er, bis das Lager der noch ungezählten Gegenstände leer ist.

Das Schema setzt sich wesentlich aus fünf Momenten zusammen, deren vier ihre offensichtliche Entsprechung in den Regeln des Zählens haben:

(1**) dem Herausgreifen von einem Gegenstand – und nicht mehreren – unter vielen;
(2**) dem Herausgreifen eines Gegenstands aus der gegebenen Vielheit – und nicht aus einer anderen;
(3**) dem Herausgreifen eines noch ungezählten Gegenstands – und nicht eines bereits gezählten;
(4**) dem Weglegen des herausgegriffenen Gegenstands in das Lager der bereits gezählten; und schliesslich
(5**) dem Herausgreifen und Weglegen aller zu zählenden Gegenstände – ohne einen ungezählt zu belassen.

Natürlich darf die Rede vom Herausgreifen und Weglegen nicht allzu anschaulich genommen werden, zumal etwa unser Hirte keines seiner Schafe im eigentlichen Sinne des Wortes aus der Herde herausgreift, um es dann wegzulegen. Sein unmittelbares Eingreifen ins Geschehen beschränkt sich wohl darauf, den Fluss ihres Eintretens in den Stall zu steuern. Gar nicht ins Geschehen greift zum Beispiel jener ein, der die Schläge der Kirchenglocke zählt, um die Uhrzeit zu erfahren, und allgemein alle, die zählend einer ihnen vorgegebenen Reihe entlang wandern, sei diese nun von zeitlicher, räumlicher oder anderweitiger Ordnung.

In den genannten Fällen greift der Zählende anders als Sortes zwar nicht unmittelbar ins Geschehen ein, Wandel findet, wenngleich auf anderer Ebene, dennoch statt. In jedem Zählschritt richtet der Zählende seinen Sinn auf einen Gegenstand und markiert ihn gleichsam als einen gezählten, wodurch die Menge der gezählten Gegenstände zu-, jene der noch ungezählten abnimmt, wonach wiederum sich der Zählende im nächsten Schritt zu richten haben wird. Die Rede vom Markieren oder Weglegen ist ebenso wie die vom Sich-richten-auf oder Herausgreifen durchaus in übertragenem Sinne zu verstehen; immerhin müssen damit derart disparate Ereignisse wie das eigentliche Weglegen eines Apfels und das gedankliche Fortschreiten in eine Richtung oder das distinkte Wahrnehmen eines Glockenschlags und das Eintretenlassen eines Schafs in den Stall unter einen Hut gebracht werden. Diese Winke mögen denn der Rechtfertigung genug sein.

Trennung und äussere Abgrenzung

§ 20 Es wird gemeinhin für eine logische Wahrheit gehalten, dass ein Satz der Form ‚a ist kein B', also ‚$\sim Ba$', zu einem entsprechenden der Form ‚Es gibt kein B, das mit a identisch ist' – oder sparsamer: ‚Kein B ist a' –, also ‚$\sim\exists x(Bx \mathbin{.} x{=}a)$', gleichwertig ist; von hier aus gelangt man nach wenigen, die Gleichwertigkeit erhaltenden Umformungen dann zu einem Satz der Form ‚Jedes B ist von a verschieden', also ‚$\forall x(Bx \supset x{\neq}a)$'. Folglich sagt der Satz, wonach a kein B sei, nicht weniger und nicht mehr aus als der Satz, wonach jedes B von a verschieden sei. Wittgensteins Ahnung, man fühle immer wieder, «dass auch im Elementarsatz von allen Gegenständen die Rede ist»[85], lässt sich da leicht nachempfinden. Diese Ahnung kann mitunter aber zu dem Irrglauben verführen, wer ein Urteil der Form ‚$\forall x\phi x$' fälle, fälle – unter Annahme eines Gegenstandsbereichs von n Elementen – im Grunde eines der Form ‚$\phi x_1 \mathbin{.} \phi x_2 \mathbin{.} \dots \mathbin{.} \phi x_n$', worin die freien Individuenvariablen durch die Namen der verschiedenen Gegenstände noch zu ersetzen wären. Da bei einem Satz der obigen Form, wo eine einfache Prädikation dem Konditional vorangestellt ist, der Wahrheitswert des ganzen Produkts ohnehin nur an jenen Gliedern

[85] *NB*, S. 76 (13.7.16).

hängt, in denen ein das vorangestellte Prädikat zu einem wahren Satz ergänzender Name vorkommt, lässt es sich um die übrigen Glieder kürzen; und da alle Namen in den dann verbleibenden Gliedern ausser ‚a' ohnehin das vorangestellte Prädikat zu einem wahren Satz ergänzen, kann jeweils das Antecedens gestrichen und einzig der Identitätssatz beibehalten werden. Demnach würde, wer ein Urteil der spezifischeren Form ‚$\forall x(Bx \supset x{\neq}a)$' fällt, im Grunde ein Urteil der Form ‚$x_1{\neq}a \,\textbf{.}\, x_2{\neq}a \,\textbf{.}\, \ldots \,\textbf{.}\, x_m{\neq}a$' fällen, worin die freien Variablen durch die Namen aller Gegenstände zu ersetzen wären, die der Extension des für ‚B' eingesetzten Prädikats zugehörig sind.

In einer Zählung ist ein Urteil der Form ‚a ist kein B' dort erforderlich, wo es einen Gegenstand herauszugreifen gilt, der unter einen bestimmten Begriff *nicht* fällt; nach dem obigen Schema tritt dieser Fall im dritten Moment und in Bezug auf das Prädikat ‚gezähltes A' tatsächlich ein. Das Herausgreifen hat sich gewiss an das Urteil darüber zu halten, ob der vorerst nur versuchsweise herausgegriffene Gegenstand unter die bereits gezählten As fällt oder nicht; denn falls das Urteil bejahend ausfällt, ist der Gegenstand, ohne ein weiteres Mal gezählt worden zu sein, zwingend dorthin zurückzulegen, wo er hingehört. Nur wenn es verneinend ausfällt, d. h. geurteilt wird, dass jener Gegenstand nicht unter die gezählten As fällt, ist er auch zu zählen und alsdann wegzulegen. Indem der Zählende, sagen wir im k-ten Zählschritt, nun urteilt, dass der soeben herausgegriffene Gegenstand a kein gezähltes A sei, bejaht er jenem Irrglauben nach im Grunde ein logisches Produkt aus $k-1$ verschiedenen Verschiedenheitssätzen – oder, was dasselbe ist, verneint er die logische Summe der entsprechenden Identitätssätze –, d. i. den Satz ‚$b_1 \neq a \,\textbf{.}\, b_2 \neq a \,\textbf{.}\, \ldots \,\textbf{.}\, b_m \neq a$' bzw. ‚$\sim(b_1 = a \vee b_2 = a \vee \ldots \vee b_m = a)$', worin ‚$b_1$', ‚$b_2$', etc. die Namen aller bereits gezählten Gegenstände sind. Um aber über die Wahrheit des Produkts urteilen zu können, muss der Zählende die Bedingungen kennen, unter denen die einzelnen Glieder wahr sind; da die Bedingungen der Wahrheit eines Verschiedenheitssatzes gleichzeitig die Bedingungen der Falschheit des entsprechenden Identitätssatzes sind und mit den Bedingungen der Falschheit zugleich jene der Wahrheit gegeben sind, muss er letztlich also die Bedingungen kennen, unter denen die Identitätssätze ‚$b_1 = a$', ‚$b_2 = a$', etc. wahr sind. Demnach bräuchte der Zählende, um sicherstellen zu können, dass er kein gezähltes A herausgreift, einen Massstab für die richtige Beurteilung dieser Identitätssätze – oder eben ein Kriterium der Identität.[86]

[86]Es scheint mir auch Geach diesem Irrglauben nachzuhängen, wo er schreibt: «If ‚$a_1, a_2, \ldots$' is a list of all the things called ‚A', then these substitutions can be made for ‚A' not only *salva congruitate* but also *salva veritate* (so long as we are concerned with Shakespearean predicables [...])» (Geach (1980, S. 191)). Im Sinn hat er hier die Substitution eines ‹substantival general term› ‚A' in Kontexten wie ‚Some A is F' und ‚Every A is F' durch eine Liste der Namen aller, wie er sagt, ‚A' genannten Gegenstände, woraus ‚Some one of $a_1, a_2, \ldots$ is F' resp. ‚Every one of $a_1, a_2, \ldots$ is F' hervorgehen würde. Eine substitutionelle Auffassung der Quantifikation passt jedenfalls gut mit seiner anderen Behaup-

Die Schafe unseres Hirten aber tragen keine Namen und auch sonst verfügt er über keine stabilen Mittel, um einzeln auf sie zuzugreifen. Natürlich wird ihm mancher Kontext den Zugriff auf einzelne Schafe mittels indexikalischer Ausdrücke oder raumzeitlicher Kennzeichnungen (z. B. mittels ‚das jetzt vor dem Tor stehende Schaf') nicht verwehren; doch gerade auf das einzelne, im Stall befindliche Schaf wird er von aussen her, von wo er die Zählung überschaut, i. A. weder zeigen noch es darin eindeutig lokalisieren können. Ohne diesen sprachlichen Zugriff aber, ohne singuläre Terme, wird er jene partikulären Sätze, über deren Wahrheitswert er gemäss Geach zu urteilen hätte, nicht einmal bilden können. Vielleicht sähen einige darin einen hinreichenden Grund dafür, ihm die Fähigkeit abzusprechen, einen allgemeinen Satz über seine Schafe mit Sinn zu versehen; ich dagegen halte die Behauptung, der Sinn jeder All- oder Existenzaussage enthalte, in welcher Weise auch immer, die Namen aller (oder auch nur aller unter einen darin vorkommenden Begriff fallenden) Gegenstände für offenkundig falsch. Frege hat dies in seiner ‚Kritischen Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik' ziemlich treffend auf den Punkt gebracht:[87]

> Wenn ich einen Satz ausspreche mit dem grammatischen Subjekte ‚alle Menschen', so will ich damit durchaus nichts von einem mir ganz unbekannten Häuptling im Innern Afrikas aussagen. Es ist also ganz falsch, dass ich mit dem Worte ‚Mensch' diesen Häuptling irgendwie bezeichne, dass dieser Häuptling in irgendeiner Weise zur Bedeutung des Wortes ‚Mensch' gehöre. Ebenso ist auch falsch, dass in einem solchen Satze viele Urteile mittels des Gemeinnamens zusammengefasst werden, wie Herr Schröder meint.

Auch dort, wo Mittel zur singulären Referenz vorhanden wären (für Freges Häuptling gäbe es sicherlich deren viele), erfolgt jener Zugriff, den uns der Gebrauch eines generellen Terms verschafft, nicht über diese Mittel; die Referenz des generellen Terms auf die Gegenstände, von denen er wahr ausgesagt wird, ist kein Bündel von singulären Referenzen. Mehr als einen generellen Zugriff auf die gezählten Schafe – einen Zugriff, der es indes erlaubt darüber zu urteilen, ob ein gegebenes Schaf zu diesen gehört oder nicht – erfordert das Handeln des Hirten auch gar nicht.

Selbst wenn wir Geach zugestünden, dass jeder Zählende diese Verschiedenheitsurteile zu fällen habe, bliebe seine Behauptung, wonach das Zählen die Anwendung eines Kriteriums der Identität erfordere, noch falsch. Nach dem Prinzip der Substitutivität genügt es nämlich, um die Verschiedenheit zweier je auf ihre Weise gegebenen Gegen-

tung zusammen, wonach Zählbarkeit das Zuhandensein eines Identitätskriteriums erfordere. (Geach erläutert seine Unterscheidung von ‹predicables› bzw. Kontexten in solche, die er ‹Shakespearean›, und solche, die er ‹non-Shakespearean› nennt, ausführlicher in Geach (1972, S. 139 ff); sie weist eine gewisse Affinität zu Quines Unterscheidung extensionaler und intensionaler Kontexte auf, ohne indes mit ihr zusammenzufallen.)

[87] *KBS*, S. 209 (454).

stände festzustellen, einen Begriff anzugeben, unter den der eine, nicht aber der andere fällt; nach dem ungleich problematischeren Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren dagegen würde erst ein Nachweis der Übereinstimmung in allen Begriffen passender Stufe hinreichen, um Identität festzustellen. Die Unmöglichkeit, einen solchen Nachweis zu erbringen, ist, wie Dummett bemerkt, nicht nur der ‹impossibility of running through the totality of first-level concepts› geschuldet, sondern bereits dem Umstand, dass oftmals kein anderer Weg besteht, sich zu vergewissern, dass ein bestimmtes Prädikat, welches vom Träger des einen Namens erfüllt wird, dies auch vom Träger des anderen Namens wird, als nachzuweisen, dass die beiden Namen denselben Träger haben.[88] Um Identität nachzuweisen bedürfte es deshalb einer zirkelfreien Abkürzung – oder eben (da liegt Geach durchaus richtig) eines Kriteriums der Identität. Mitunter aber kann einer – darauf weist schon Frege hin – über ein Kriterium der Identität verfügen, ohne dass es in seiner Macht stünde, es anzuwenden; in solcher Lage befände sich auch, sollte ihm trotz allem ein Kriterium für Schafe zuhanden stehen, unser Hirte: im Besitz eines Identitätskriteriums, und doch ausserstande, ein heimlich aus dem Stall entflohenes Schaf als eines der bereits gezählten wiederzuerkennen. Falsch wäre es indes nach wie vor, ihm deswegen die Fähigkeit, seine Schafe zu zählen, abzusprechen; zu beanstanden wäre vielmehr das Leck in der von ihm gezogenen Abgrenzung zwischen den gezählten und den noch ungezählten Schafen.

Wenigstens unser Hirte bedarf also keines allgemeinen Kennzeichens für die Gleichheit der zu zählenden Gegenstände; ihm genügt eines, woran sich die gezählten von den ungezählten trennen lassen – ein Kennzeichen, das gleichsam den Graben dazwischen anzeigt. Nicht allein die Sorte der Gegenstände bestimmt, worum es sich dabei im Einzelfall handelt, sondern in beträchtlichem Masse die speziellen Umstände, unter denen die Zählung vollzogen wird. Unser Hirte etwa setzt als trennendes Kennzeichen den Begriff ‚im Stall befindliches Schaf' ein und sorgt durch sein Handeln dafür, dass der Graben zwischen dem Lager der bereits gezählten und jenem der noch ungezählten Schafe stets entlang seiner äusseren Grenzen verläuft; diese werden, indem er das jeweils eben gezählte Schaf in den Stall schleust, in jedem Zählschritt von ihm neu gesetzt. Nicht immer muss dies Kennzeichen an einen Begriff gebunden sein, dessen Umfang der Zählende durch Änderungen an den zu zählenden Gegenständen (oder den Verhältnissen zwischen ihnen) beeinflusst; mithin kommt das Weglegen nicht immer einem wirklichen Eingriff in die Sache selbst gleich. Ein Kikuyu, der ja jedes seiner Tiere unter allen praktischen Umständen als ebenjenes Individuum, das es ist, wiedererkennen würde, könnte beim

[88] Vgl. Dummett (1981, S. 544). Als Beispiel eines solchen Prädikats führt er ‚ist kurz vor Sonnenaufgang sichtbar' an und hat dabei die kennzeichnenden Namen ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' im Sinn.

Abzählen seiner Herde durchaus auf eine räumliche oder sonstige wirkliche Trennung der gezählten von den ungezählten Tieren verzichten; gleichwohl käme er nicht umhin, die gezählten Tiere irgendwie zu markieren. Denn zur Befolgung der dritten Regel bedarf es mehr als nur eines einfachen Wiedererkennungsurteils; der Kikuyu müsste ein bereits gezähltes Tier, das ihm erneut unter die Augen fiele, nicht bloss als das Individuum, das es ist, wiedererkennen, sondern zudem auch als bereits gezähltes. Vielleicht ist es, um sie etwa von der trennenden Tätigkeit unseres Hirten abzuheben, daher angebracht, Markierungen dieser Art als sekundäre zu bezeichnen, was jedoch nicht so gedeutet werden darf, als hingen nicht auch sie an wirklichen, wenngleich von dem Zählenden unberührten, Eigenschaften der Sache selbst.

Nebst Fällen der besprochenen Art kommen sekundäre Kennzeichen einerseits dort zur Anwendung, wo der Zählende notgedrungen auf solche zurückgreift, weil ihm wirkliche Eingriffe in die Sache selbst verwehrt sind, und andererseits dort, wo eine bereits bestehende Ordnung unter den zu zählenden Gegenständen ihre Trennung dermassen erleichtert, dass ein Eingreifen sich erübrigt. Als ein Beispiel der letzteren Art gestaltet sich das für gewöhnlich der Lese- und Schreibrichtung folgende Zählen der Wortvorkommnisse in einem Text; um kein Wort zweimal zu zählen, reicht es hin, stets in diese eine Richtung fortzuschreiten und alles, was links oder oberhalb von dem gerade betrachteten Wort steht, dem Lager der gezählten zuzurechnen. Ein Beispiel der erstgenannten Art ist das (an Sonntagen bei manchen Leuten nicht unbeliebte) Zählen der unter einer Autobahnbrücke hindurch sausenden Fahrzeuge. Als naheliegende Wahl bietet sich hier das Kennzeichen, die Brücke unterfahren zu haben, an, zumal wenn der Einfachheit halber davon ausgegangen werden darf, dass kein Fahrzeug in der betreffenden Zeitspanne die Stelle mehrfach passieren wird. Im Gegensatz zur Anordnung der Wörter im Textfluss erfolgt die Anordnung der Unterfahrungen in der Zeit nicht linear, d. h. es können sich im selben Zeitpunkt (zumal auf einer Autobahn) mehrere Unterfahrungen ereignen.

Ohne die getroffene Annahme würde uns Geach mit Recht dazu ermahnen, eine Unterscheidung zwischen der Zählung von Fahrzeugen und der von Unterfahrungen durch solche vorzunehmen. Gleichwie es ganz und gar unmöglich ist, dass derselbe Glockenschlag erneut ertönt, ist es ganz und gar unmöglich, dass sich dieselbe Unterfahrung erneut ereignet. Ein Ereignis in der Zeit wiederholt sich nicht; oder wie es Wittgenstein in sein Kriegstagebuch schrieb: «Die Einsinnigkeit ist eine logische Eigenschaft der Zeit.»[89] (Obwohl manch einer jedes Jahr aufs Neue seinen Geburtstag zu feiern pflegt, ist es doch stets ein anderer Geburts*tag*.) Daher scheint es beim Zählen von Ereignissen in der Zeit nachgerade überflüssig, auf die Befolgung der dritten Regel zu achten.

[89] *NB*, S. 84 (12.10.16).

Die von selbst voranschreitende Grenze zwischen Vergangenem und Zukünftigem bildet zugleich den Graben, an dem sich Gezähltes von Ungezähltem scheidet. Der Zählende muss einzig darauf achten, weder Vergangenes noch Zukünftiges, sondern stets nur Gegenwärtiges zu zählen; einen besonderen Aufwand wird er, wenn höchstens einige wenige Ereignisse in derselben kurzen Zeit die Seite wechseln, hierfür keinen zu betreiben haben. Das trennende Kennzeichen, an das er sich dabei zu halten hat, ist wie in den beiden vorangegangenen Beispielen ein sekundäres, da auf das zu Zählende kein Einfluss genommen wird; im Gegensatz zur Wortzählung aber ist das Kennzeichen hier wie auch im Autobahnbeispiel in dem Sinne kein subjektives, als nicht der Graben zwischen Gezähltem und Ungezähltem dem geistigen Auge des Zählenden folgt, sondern umgekehrt sich dieser in seinem Zählen nach dem von ihm unbeeinflussten Wandel der Sache richtet.

§ 21 Ohne die Verschiebung des Grabens zwischen Gezähltem und Ungezähltem kommt das Zählen nicht aus; das zu Zählende unterliegt beim Zählen wesentlich dem Wandel vom ungezählten in den gezählten Zustand, ungeachtet dessen, ob dieser nun vom Zählenden selbst bewirkt wird oder nicht, und ob er die Sache selbst oder nur ihre Betrachtung durch den Zählenden betrifft. Kein Wandel aber geschieht ausserhalb der Zeit. Jedem Zählen also wohnt ein zeitliches Moment inne und zwar nicht nur, wie Frege meinte, als ‹psychologisches Erfordernis›[90], sondern seinem Wesen nach. Nicht einmal der Aufstieg in die zeitlosen Gefilde der Logik lässt diesen Wesenszug gänzlich verschwinden; gleichsam als Bodensatz bleibt von der Zeitlichkeit des Zählens ein Gerüst übrig, aufgespannt durch Abhängigkeiten zwischen gebundenen Variablen. Sichtbar wird dieses Gerüst in der schematischen Darstellung der logischen Form eines Satzes wie ‚Es befinden sich (mindestens) n Schafe im Stall‘:

$$\exists x_1, ..., x_n (x_1 \neq x_2 \,.\, ... \,.\, x_1 \neq x_n \,.\, x_2 \neq x_3 \,.\, ... \,.\, x_2 \neq x_n \,.\, ... \,.\, x_{n-1} \neq x_n \\ .\, (Ax_1 \,.\, Bx_1) \,.\, ... \,.\, (Ax_n \,.\, Bx_n)).$$

Es treten hier die gebundenen Variablen ausschliesslich im Schnittbereich ihrer Quantoren auf, worin sich jede in einem negierten Identitätssatz jeder anderen gegenübersieht. Von dieser durch das negierte Identitätszeichen vermittelten Beziehung – die ich in meiner Arbeit zur Identität bei Wittgenstein in Anlehnung an Freges Rede von verwandten Argumentstellen Fremdschaft genannt habe – hat ersterer in seiner *Abhandlung* gezeigt, dass sie anstatt mit dem negierten Identitätszeichen sparsamer durch eine veränder-

[90] *GA*, § 40.

te Variablenschreibweise ausgedrückt werden kann.[91] Nach Wittgensteins veränderter Schreibweise stellt schon

$$\exists x_1, ..., x_n((Ax_1 \centerdot Bx_1) \centerdot ... \centerdot (Ax_n \centerdot Bx_n))$$

die logische Form des obigen Satzes zulänglich dar, wohingegen dies selbe Schema nach der üblichen Lesart lediglich für eine, wenngleich ziemlich redundante, Darstellung der logischen Form von ‚Es befindet sich (mindestens) ein Schaf im Stall‘ hinreicht.

Auf der semantischen Ebene äussert sich diese Abhängigkeit zwischen den gebundenen Variablen – die nach der einen Lesart im zweiten Schema vorhanden, nach der anderen, der üblichen, hingegen fehlt – in unterschiedlichen Folgerungsverhältnissen. Üblicherweise ist

$$((Aa_1 \centerdot Ba_1) \centerdot ... \centerdot (Aa_n \centerdot Ba_n)) \vDash \exists x_1, ..., x_n((Ax_1 \centerdot Bx_1) \centerdot ... \centerdot (Ax_n \centerdot Bx_n))$$

ein gültiges Folgerungsschema für Sprachen erster Stufe mit freien Variablen oder Individuenkonstanten; aus jeder Instanz von ‚$(Aa_1 \centerdot Ba_1) \centerdot ... \centerdot (Aa_n \centerdot Ba_n)$‘ folgt die entsprechende Instanz der Konklusion. Werden die Variablen indes nach Wittgensteins Vorschlag gelesen, geht die Gültigkeit verloren; damit aus einer Instantiierung der Prämisse ein wahrer Satz hervorginge, aus dem die entsprechende Instanz der Konklusion folgt, müsste – was einem zusätzlichen Erfordernis gleichkäme – dafür gesorgt sein, dass für verschiedene Individuenbuchstaben bedeutungsverschiedene Konstanten eingesetzt werden. Dieses Erfordernis lässt sich, wenn wir uns die Einsetzung schrittweise denken, auch so fassen: Während für den ersten schematischen Individuenbuchstaben, d. i. ‚a_1‘, eine beliebige Konstante eingesetzt werden darf, solange der von ihr bedeutete Gegenstand unter die beiden Begriffe, deren Zeichen die Stellen von ‚A‘ und ‚B‘ eingenommen haben, fällt, muss im zweiten Schritt für ‚a_2‘ eine Konstante eingesetzt werden, die einen anderen Gegenstand als die erste bedeutet, im dritten eine, die einen anderen Gegenstand als die beiden zuvor eingesetzten bedeutet, etc. Die Auswahl der nächsten Konstanten ist demnach durch alle früheren Auswahlen eingeschränkt.

[91] Vgl. *GG 1*, S. 8, 13; *LPA*, 5.53er; sowie meine unveröffentlichte Arbeit ‚Identität bei Wittgenstein. Zweiter Teil: Identität und Tautologie‘. Die (unvermittelte) Verwandtschaft von Argumentstellen wird in geschlossenen Ausdrücken durch das mehrfache Vorkommen einer Variablen im Bereich des sie bindenden Quantors angezeigt; so sind etwa die Argumentstellen der beiden Funktionen in ‚$\exists xAx \centerdot \exists xBx$‘ nicht verwandt, obwohl durch Vorkommnisse einer Variablen ‚x‘ besetzt; in ‚$\exists x(Ax \centerdot Bx)$‘ hingegen sind sie es. Über Freges Gebrauch des Wortes hinausgehend lässt sich auch von den Variablenvorkommnissen selbst sagen, sie seien verwandt, wenn sie verwandte Stellen besetzen, und nicht verwandt, wenn sie nicht verwandte Stellen besetzen. Fremdschaft ist das durch das negierte Identitätszeichen vermittelte Gegenstück zur Verwandtschaft von Variablen. (Unvermittelt fremde Variablen indes treten nur in Wittgensteins verändertem System auf.)

Unweigerlich und doch zwanglos haben am Ende wiederum Zeitwörter – den unumkehrbaren Fluss der Zeit anzeigende Wörter – Eingang in die Erläuterung jener Abhängigkeit gefunden. Solche Rede kann gleichwohl als eine übertragene geduldet werden, zumal das Bild von dem Aufeinanderfolgen voneinander abhängiger Auswahlakte durchaus seine exakte Entsprechung in der räumlich angeordneten Zeichensprache der Logik hat. Ein die Gleichwertigkeit erhaltendes Umformungsverfahren, das von Behmann entwickelt und anschaulich als Hineintreibung der Operatoren (d. s. Quantoren) bezeichnet worden ist und ihm, nebenbei gesagt, zum ersten Entscheidungsverfahren für die einstellige Prädikatenlogik erster Stufe verholfen hat,[92] führt, wenn es auf das erste der obigen Schemata angewandt wird, zu einer anderen Darstellung der logischen Form von ‚Es befinden sich (mindestens) n Schafe im Stall':

$$\exists x_1((Ax_1 \mathbin{.} Bx_1) \mathbin{.} \exists x_2(x_2 \neq x_1 \mathbin{.} (Ax_2 \mathbin{.} Bx_2) \mathbin{.} \exists x_3(x_3 \neq x_2 \mathbin{.} x_3 \neq x_1 \mathbin{.} (Ax_3 \mathbin{.} Bx_3) \\ \mathbin{.} \ldots \mathbin{.} \exists x_n(x_n \neq x_{n-1} \mathbin{.} \ldots \mathbin{.} x_n \neq x_1 \mathbin{.} (Ax_n \mathbin{.} Bx_n))\ldots))).$$

Wo eine Auswahl nicht von früheren abhängig gemacht werden kann, ist ein Zählen unmöglich – mitunter selbst wenn es nur einen Gegenstand zu zählen gäbe. Würden wir Sortes beim Zählen der Äpfel in seinem Korb (siehe § 12) das Weglegen verbieten und ihm stattdessen die Weisung erteilen, immer nur einen Apfel auf einmal aus dem Korb herauszugreifen, um ihn danach unverändert dorthin zurückzulegen, käme er nicht weit mit dem Zählen. Griffe er, nachdem der erste Apfel zurückgelegt und auf ‚eins' gezählt wäre, ein zweites Mal in den Korb, um einen Apfel herauszuziehen, wäre er nicht berechtigt, auf ‚zwei' zu zählen, da er – es sei hier an die Gleichheit der Äpfel erinnert – über kein Kennzeichen verfügte, das entscheiden würde, ob der herausgegriffene Apfel schon einmal gezählt worden ist oder nicht. Jedoch ist das Fehlen eines trennenden Kennzeichens nicht der alleinige Grund für die Unzählbarkeit der Äpfel unter den genannten Umständen; auch wenn es Sortes gestattet sein sollte, jeden herausgegriffenen Apfel als gezählten zu markieren, könnte er dennoch nie ganz ausschliessen, dass sich ein nach wie vor ungezählter Apfel im Korb verbirgt. (Die Wahrscheinlichkeit dafür nähme freilich mit jeder neuen Ziehung ab; es scheint mir eine Verwandtschaft zum *coupon collector's problem* zu bestehen.) Und selbst wenn der Korb bloss einen einzigen Apfel enthielte, wäre Sortes zwar in der Lage diesen herauszugreifen und als einen zu zählen, nicht aber zu entscheiden, dass die Zählung hier zu beenden sei. Mitunter kann das Weglegen dem Zählenden also, indem es ihm einen gewissen Überblick über die noch zu zählen-

[92] Vgl. Behmann (1922, S. 187-91); vgl. für ähnliche Verfahren Hilbert und Bernays (1968, S. 145-7) und Quine (1945).

den Gegenstände verschafft, auch dort ein anwendbares Kriterium zur Beendigung des Zählvorgangs an die Hand geben, wo der Begriff ‚markiertes *A*' diese nicht gewährt.

Wenn aber dem bedauerlichen Sortes derart der Überblick über die Äpfel in seinem Korb fehlte, wie könnte er da, liesse sich einwenden, in der Lage sein, selbst bei genehmigtem Weglegen zu entscheiden, ob nun alle Äpfel weggelegt und damit gezählt sind oder nicht? Es könnte sich ja immer ein noch ungezählter Apfel im Korb verbergen. Dem ist zu entgegnen, dass Sortes durchaus die gesamte abzuzählende Vielheit hinlänglich überblicken könnte, um im richtigen Moment zu entscheiden, dass sich keine Äpfel mehr im Korb befinden, ohne, für den Fall, dass ihm das Weglegen verwehrt bliebe, deshalb schon den nötigen Überblick über die noch zu zählenden Äpfel zu haben. Sortes könnte nämlich zum Beispiel das Leergewicht seines Korbs kennen und die Beendigung des Zählvorgangs an die Erreichung dieses Gewichts knüpfen; beim Zählen mit Zurücklegen wäre ihm dieses zusätzliche Wissen jedoch von keiner Hilfe.

§ 22 Das Abzählen einer Vielheit von *A*s erfordert vom Zählenden in jedem Zählschritt aufs Neue, dass er ein noch ungezähltes *A* herausgreife. Das Urteil, wonach der herausgegriffene Gegenstand kein gezähltes *A* sei, steuert hierzu erst die eine Hälfte bei; die andere besteht in dem Urteil, dass jener Gegenstand ein *A* und nicht etwas anderes sei. Der anstelle von ‚*A*' eingesetzte Zählbegriff sorgt für die nötige Abgrenzung nach aussen, d. i. gegen alles, was nicht unter ihn fällt. Frege hat bekanntlich für jeden Begriff – und nicht nur für solche, denen die Zahl beigelegt wird –, gefordert, dass er, um von der Logik überhaupt als Begriff anerkannt werden zu können, scharf begrenzt sei, d. h. «dass für jeden Gegenstand bestimmt sei, ob er unter ihn falle oder nicht»; «[e]in dritter Fall, etwa der der Unentschiedenheit oder Unbestimmtheit», wäre damit ausgeschlossen.[93] Manche Philosophen sind indessen darin geübt, sich bizarre Umstände auszudenken, unter denen selbst scharfe Begriffe an die Grenzen ihrer Bestimmtheit stossen; nur wenig Mühe dürfte ihnen etwa die Vorstellung absonderlicher Geschöpfe bereiten, die, weil sie, obwohl keine Schafe, äusserlich und in beliebiger anderer Hinsicht von echten Schafen nicht zu unterscheiden wären, unseren Hirten im Hinblick auf jenes zweite Urteil arg in Bedrängnis brächten. Gewiss wäre es überzogen, einem Begriff, der nicht allen philosophischen Fantasien standhielte, deshalb die Eignung als Zählbegriff allgemein abzusprechen. Gleichwohl muss der Begriff ‚Schaf', wenn er unserm Hirten in Situationen seines Alltags als Zählbegriff dienen soll, das unter ihn Fallende gegen alles andere, was darin vorkommt, scharf abgrenzen. Der Hirte muss im begrenzten Rahmen

[93] *GA*, § 74; *NS*, S. 248.

seiner Welt für alles, was ihm über den Weg läuft, entscheiden können, ob es sich um ein Schaf handelt oder nicht – *tertium non datur*.

Da nicht anzunehmen ist, dass alle Schafe, die unserm Hirten auf seinen Streifzügen durch die weiten Graslandschaften über den Weg laufen, ihm gehören, reicht der Schafsbegriff allein nicht hin; er entbehrt, wie an der kumulativen Referenz der Pluralform seines Zeichens (siehe § 15) ersichtlich wird, einer gewissen Begrenzung. Denn was der Hirte einzusammeln und alsdann zu zählen gedenkt, bildet nur einen kleinen Teil jener Gesamtheit weit verstreuter Lebewesen, die unter den unbeschränkten Begriff fallen; es sind dies lediglich *seine* Schafe. Der eingeschränkte Begriff, dessen sprachliches Zeichen – sei dies ‚mein Schaf' oder ‚Schaf (aus der Herde) unseres Hirten' – nicht unwesentlich einen auf den Hirten verweisenden Ausdruck enthält, soll das unter ihn Fallende nicht nur gegen alles Artfremde abgrenzen, sondern auch gegen artverwandte Tiere, die nicht der betreffenden Herde angehören.[94] Zu diesem Zweck wird der Hirte seine Schafe mit einer speziellen Marke versehen haben, die ihn als deren Eigentümer ausweist und sie von allen anderen Schafen unterscheidet; an dieser Marke wird er beim Einsammeln seine Schafe erkennen. Nicht fern läge da der gleichwohl voreilige Schluss, unser Hirte gebrauche den Ausdruck ‚mein Schaf' synonym zu ‚Schaf mit spezieller Marke'. Die jeweiligen Begriffe sind, obzwar der Hirte um ihre Umfangsgleichheit besorgt sein dürfte, dennoch verschieden; wenn ein anderer Hirte, was nicht undenkbar ist, sich aus Zufall oder Absicht dazu entschlossen hätte, seine Schafe genau gleich zu markieren, wäre es gewiss abwegig zu folgern, die Herde unseres Hirten hätte damit unverhofften Zuwachs erhalten.

Welche Schafe unserm Hirten gehören, hängt nicht daran, ob und wie sie markiert sind; das eigentliche, unfehlbare Kennzeichen der Zugehörigkeit zur Herde ist weitaus schwieriger anzugeben, da es an ihre Entwicklung in der Zeit, ihre Geschichte, und an die Eigenarten der Hirtenkultur, in der sie sich entfaltet hat, gebunden ist. Von einem Bock und einer Aue aus der Herde gezeugt und nicht weggegeben worden zu sein, dürfte vielerorts dazu hinreichen, ihr anzugehören; notwendig wäre es indes nur dort, wo Hirten keine fremden Tiere in ihre Herden aufnehmen. Bei strenger Einhaltung dieser Aufnahmeregel, lässt sich die Herde den Zeugungslinien entlang im Prinzip bis zu ihren „Urahnen" zurückverfolgen, wenngleich es zu bedenken gilt, dass diese freilich kaum die gesamte Urherde ausmachen, da sich aller Wahrscheinlichkeit nach nicht jedes einstmals im Eigentum des Hirten gestandene Schaf fortgepflanzt haben dürfte. Demnach ist je-

[94] Laycock schreibt hierzu: «It is not the meaning content of the plural noun itself that sets whatever limits there may be; it is contingencies of context, including acts of demonstration – for example, *these apples* – that demarcate the subject matter of a discourse» (Laycock (2006, S. 536)). Diese ‹contingencies of context› entsprechen weitgehend dem, was ich hier Umstände nenne.

des seiner jetzigen wie auch seiner vergangenen Schafe, indem es einen Punkt, mitunter einen vorläufigen Endpunkt, auf einer dieser Linien darstellt, als der Herde zugehörig gekennzeichnet. Um jedoch dieses Kennzeichen beim Einsammeln der Schafe anwenden zu können, müsste der Hirte den Überblick über das sich stets erweiternde Abstammungsmuster bewahren und jedes einzelne Schaf darin verorten können – was ihm einen selbst für Kikuyu abschreckend hohen Aufwand aufbürden würde. Im Verhältnis erscheint das allabendliche Zählritual als nachgerade bequemlich, auch wenn es nebst der Anfertigung eines Kerbholzes (o. dgl.) die (zudem nur wenig fälschungssichere) Markierung der ihm gehörenden Schafe erforderlich macht.

Das Markieren der Schafe bringt allein den nötigen Überblick nicht; es hilft dem Hirten zwar, unter den über die Landschaft verstreuten Schafen die seinigen herauszutreiben, nicht aber zu entscheiden, ob nun alle Schafe zusammengetrieben sind oder ob welche fehlen. Abhilfe dafür schafft erst die Zählung der Schafe. Erreicht der Hirte mit dem Eintreten des letzten Schafs in den Stall zugleich die letzte Kerbe auf seinem Stock, weiss er – sofern inzwischen keine Geburten oder Verluste eine Anpassung der Kerbfolge erforderlich gemacht haben –, dass sich nun gleich viele Schafe im Stall befinden wie am Vorabend; hat er zudem darauf geachtet, nur Schafe, die seine spezielle Marke tragen, in den Stall zu schleusen, und ist er berechtigt in der Annahme, allein seine Schafe trügen die Marke, wird er mit gutem Grund daraus schliessen, dass die nun im Stall eingepferchte Herde vollzählig ist, dass nun also all seine Schafe unter den Schutz der Stallung gestellt sind. Sollte der Hirte andererseits die letzte Kerbe nicht erreichen, wüsste er ohne weiteres, dass Schafe aus der Herde fehlen – ein zureichender Grund, sich erneut auf die Suche zu machen, sei es lediglich um den Tod fehlender Tiere festzustellen und die entsprechende Anzahl Kerben von dem Holz abzutragen. Sollte die letzte Kerbe dagegen schon vor der Einschleusung aller versammelten Tiere erreicht sein, wüsste er – sofern kein frischgeborenes Lamm zu verzeichnen ist –, dass er mehr Schafe zusammengetrieben hat, als in seinem Eigentum stehen, dass ihm also beim Einsammeln ein Fehler unterlaufen sein muss.

Indem das Zählen unserm Hirten hilft, den Bestand der Herde zu wahren und sein Bild von ihr stetig aufzufrischen, verleiht es ihm Kontrolle über seine Schafe; das in sein Kerbholz geritzte Bild ihrer Anzahl vermittelt ihm einen Überblick über ihre Gesamtheit, für den er sonst viel weitreichendere Kenntnisse der einzelnen, sie zusammensetzenden Individuen aufbringen müsste. Es mag zwar, wie Frege meint, für die Bildung der Zahl – oder für ihren Begriff – die Absicht, einen Überblick zu gewinnen, unwesentlich sein, für das Zählen aber ist sie mitunter bestimmend; daher ist ihm, wo er behauptet, man werde kaum sagen können, «dass eine Herde übersichtlicher wird, wenn man erfährt, aus wieviel

Häuptern sie besteht», entschieden zu widersprechen.[95] Die Möglichkeit des Zählens, das haben wir gesehen, setzt wiederum einen gewissen, wenn auch anderen Überblick über die Gesamtheit der zu zählenden Gegenstände voraus, und dies in zweifacher Hinsicht: Dem Zählenden darf keiner der Gegenstände ungreifbar verborgen bleiben, da er ihn sonst unmöglich als einen zählen könnte; und er muss – zumal jeder Zählvorgang genau dann zu enden hat, wenn das Lager der noch ungezählten Gegenstände leer wird – dieses Lager insofern überblicken, als er ein Kriterium zur Beendigung des Vorgangs braucht.[96]

Nicht immer ist ein Überblick über das Lager der noch ungezählten Gegenstände von gleicher Wichtigkeit; wo der Zweck einer Zählung darin besteht, die Vollzähligkeit einer Vielheit zu überprüfen, ist das Erreichen des Zeichens ihrer vorgegebenen Anzahl, sofern Fehler beim Einsammeln der zu zählenden Gegenstände mit vernünftiger Gewissheit ausgeschlossen werden können, Grund genug, den Zählvorgang zu beenden. Zählungen dieser Art, die wir prüfende nennen könnten, unterscheiden sich diesbezüglich von bestimmenden Zählungen, deren Zweck es ist, die Anzahl einer Vielheit zu bestimmen. Offensichtlich hat jeder prüfenden Zählung eine bestimmende voranzugehen, bei der die Anzahl jener Vielheit, deren Vollzähligkeit zu einem späteren Zeitpunkt zur Überprüfung ansteht, bestimmt wird. Im Hirtenbeispiel nimmt das Kerben des Zählstocks die Rolle einer ersten, bestimmenden Zählung ein; hier wird jenes Anfangssegment der Zählzeichenreihe in das Holz eingeritzt, welches zur gegebenen Vielheit gleichzahlig ist. Das Ergebnis dieser Zählung wirkt unter Vornahme aller Anpassungen, die sich aufgrund von Bestandesfluktuationen – der Begriff ‚Schaf aus der Herde unseres Hirten' enthält ja die Zeit als veränderlichen Bestandteil – aufzwingen, für alle späteren, die Vollzähligkeit der Herde prüfenden Zählungen massgebend. Die bei der Kerbung anwesende Vielheit gibt für die Herde des Hirten, zumindest im Hinblick auf die Anzahl, die ihr zukommt, gleichsam den Standard vor, woran sich alle späteren Viehansammlungen werden messen lassen müssen; umso wichtiger ist es also, hier keinen Fehler zu begehen, etwa weil aufgrund mangelnden Überblicks ein Schaf vergessen gegangen ist – zumal keine Anzahl vorgegeben ist, die ein willkommenes Kriterium zur Beendigung des Kerbvorgangs liefern könnte.

---

[95] *GA*, § 26.

[96] An dieser Stelle liesse sich zur spezifischen Form der Unzählbarkeit bei reellen Zahlen, der Überabzählbarkeit, tentativ sagen, sie gründe darin, dass selbst einem hypothetischen, bis ins Unendliche fortschreitenden Zähler der nötige Überblick über die Gesamtheit der transzendenten Zahlen verwehrt bliebe – dies jedoch nicht, weil die Mathematik in ihrer Entwicklung nicht weit genug fortgeschritten wäre, sondern weil es die Natur der Sache so will. Es enthält ja bereits jedes mehrelementige Intervall von $\mathbb{R}$ überabzählbar viele Elemente; nie hätte der Zähler also auch nur ein noch so kurzes Segment der Reihe ausgezählt.

Wo die Kunst des Zählens sich nicht entwickelt hat oder einstweilen in Vergessenheit geriet, ist die Bestimmung der Anzahl einer Vielheit kein denkbarer Zweck; wie könnte, wo das Zählen unbekannt ist, das Wieviel überhaupt erfragt sein (siehe § 5)? Dagegen ist die Wahrung des Herdenbestands als möglicher Zweck nicht an die Verbreitung von Zählkünsten gebunden. Und mitunter können, um den Bestand einer Herde zu wahren, Kenntnisse darüber, ob eine gegebene Vielheit alle Elemente der Herde umfasst oder manche fehlen – d. i. zu wissen, ob die zusammengetriebene Herde vollzählig ist oder nicht –, äusserst hilfreich sein. Weder, um dies zu erfragen, noch, – wie das Beispiel der Abiponen zeigt (siehe Anm. 13) – um über ein Mittel zur Findung des Erfragten zu verfügen, bedarf es indes einer Einweihung in die Zählkunst – obgleich sich das Zählen jener Herde, deren Vollzähligkeit es zu prüfen gilt, natürlich als äusserst mächtiges und zugleich wirtschaftliches Mittel zur Erreichung dieses Zwecks nachgerade anbietet. Gerade deshalb aber kommt das Überprüfen der Vollzähligkeit als Urzweck des Zählens in Betracht. Von diesem Standpunkt aus lässt sich nun, wenn es gefällt, eine Hypothese zur Entwicklung des Zählens im eigentlichen Sinne, d. h. insbesondere von Zählzeichen, aufstellen.

Das Verfahren, welches Kleene beschreibt (siehe § 8), lässt sich nicht nur dazu anwenden, die mächtigere von zwei gegebenen Vielheiten ausfindig zu machen, sondern insbesondere auch zur Prüfung ihrer Gleichzahligkeit; da in jedem Fall die physische Anwesenheit zweier Vielheiten vorausgesetzt ist, kann das Verfahren weder dazu dienen, raumzeitlich getrennte Vielheiten miteinander, noch, eine Vielheit unmittelbar mit sich selbst zu vergleichen. Es scheint daher das Unmögliche ins Auge zu fassen, wer, um den Bestand seiner Herde über die Zeit hinweg zu kontrollieren, den Weg über eine zeitüberbrückende Anwendung dieses Verfahrens auf ein und dieselbe Vielheit in Bezug zu sich selbst einzuschlagen gedenkt. Symmetrie und Transitivität der Gleichzahligkeitsbeziehung schlagen indes eine Bresche in die nur scheinbar unüberwindbare Mauer; denn sie ermöglichen die Übertragung der Mächtigkeit einer Vielheit auf eine andere, zu der sich dann mit gleichem Ergebnis wie zur ersten eine dritte in Vergleich setzen lässt.[97] Findet sich eine Vielheit, die mit der zu kontrollierenden Herde zu gegebener Zeit gleichzahlig ist und von der zudem vernünftigerweise angenommen werden darf, dass sie in ihrer Mächtigkeit gleich bleibt, kann durch ihre Vermittlung jene Herde stets von Neuem auf Gleichzahligkeit mit sich im früheren Zustand hin geprüft werden. So ebnet ein aus dem Willen zur Kontrolle hervorgehender und durch die logischen Eigenschaften

[97] Es sei V eine beliebige und W eine ihr gleichzahlige Vielheit; es ist dann eine dritte Vielheit genau dann mit W gleichzahlig, wenn sie mit V gleichzahlig ist. Ohne Symmetrie besteht diese Äquivalenz nicht: Es könnte W mächtiger als V, Z nicht mächtiger als W und Z dennoch mächtiger als V sein.

der Gleichzahligkeit gleichsam kanalisierter Druck den Weg zur Entwicklung standardisierter Stellvertretersysteme, oder eben von Zählzeichen. Jenes bei Kleene beschriebene Verfahren, welches selbst wiederum – desgleichen wie das Prinzip der Stellvertretung – in einem ganz anderen Kontext als dem von Mächtigkeitsvergleichen geprägten seinen Ursprung haben dürfte, offenbart sich in der eben entworfenen Hypothese als das, was es meines Erachtens eigentlich ist: eine Vorform unserer Zählweise, ein Proto-Zählen.

Prinzip der Einheit und mangelnde Unterscheidbarkeit

§ 23 Es wurde weiter oben (in § 6) gesagt, die Weise, in der unser Hirte von seinem Kerbstock Gebrauch macht, erfordere eine versammelte Schafsherde. Dies als ein logisches Erfordernis an das Zählen zu verstehen, wäre jedoch falsch; völlig zu Recht verwirft Frege die falsche Auffassung, indem er rhetorisch fragt, ob denn die Strohhalme ein Bündel bilden und die Blinden im Deutschen Reich in einer Versammlung vereinigt sein müssten, um gezählt werden zu können; an anderer Stelle spricht er auch von der ‹sammelnde[n] Kraft des Begriffs›, welche ‹die vereinigende der synthetischen Apperception› weit übertreffe.[98] Gewiss hätte die sammelnde Kraft des Begriffs ausgereicht, um die Schafe, als sie noch weit über die Landschaft verstreut weideten, zählen zu können, obschon es dem Hirten ohne primäres Kennzeichen sicherlich schwerer gefallen wäre, die gezählten von den ungezählten zu trennen. Dieses Sammeln, das der Begriff ganz ohne subjektives Zutun und nebenher zur äusseren Abgrenzung bewerkstelligt, ist indes kein Vereinen, da er, wie wir gesehen haben (siehe § 16), das unter ihn Versammelte desgleichen gegeneinander, also gleichsam nach innen, abgrenzt.

Bei Frege heisst es, der Begriff, dem die Zahl beigelegt wird, – d. i. in unserem Wort der Zählbegriff – grenze im Allgemeinen das unter ihn Fallende in bestimmter Weise ab. Dasselbe liesse sich, Obiges aufnehmend, vielleicht auch so sagen: Die abgrenzende Kraft des Begriffs bewirke in den allermeisten Fällen, dass jeder unter ihn fallende Gegenstand von jedem anderen bestimmt abgegrenzt sei. Jenes einzelne unter den Zählbegriff Fallende und demnach gegen alles andere abgegrenzte – Frege nennt es kurz davor ‹von der Umgebung abgesondert› –, lässt in sich jedoch keine derartige Abgrenzung zu; es ist in dem Sinne unteilbar, als es keine beliebige Zerteilung gestattet. Der gewöhnliche Wasserbegriff etwa vermag, wie sich zeigte, insbesondere der zweiten Bedingung nicht zu genügen, zumal er der Teilbarkeit des unter ihn Fallenden keine Grenzen setzt(; wir sagten mit Krifka, er lasse die Frage der Atomarität offen). Obzwar die Ergänzung des Begriffs durch eine Massangabe wie ‚Liter' der wilden Teilbarkeit Schranken setzt, vermag auch der ergänzte Begriff das unter ihn Fallende nicht in der Manier eines Zähl-

[98] *GA*, § 23, 48.

begriffs, d. i. in Zählbares, abzugrenzen. Um die festgestellte Unzählbarkeit zu erklären, könnte auf die Überschneidungen zwischen verschiedenen Litern Wasser hingewiesen und im gleichen Anlauf zudem die allgemeinere Vermutung geäussert werden, dass nur diskrete Gegenstände, d. s. solche ohne gemeinsame Teile, zählbar seien. Es gilt indes die Passage bei Frege genau zu lesen: An ihrem Ende bleibt als zweite Bedingung noch übrig, dass der Begriff keine *beliebige* Zerteilung (des unter ihn Fallenden) gestatte, wodurch freilich nicht jede Art der Teilbarkeit ausgeschlossen wird. Diese Hintertür, so unauffällig sie platziert sein mag, hat Frege mit nicht geringer Hellsicht eingebaut; so ist zum Beispiel das unter den Begriff der Teilmenge von M Fallende, wobei M eine endliche Menge sei, durchaus zählbar, obgleich manche Teilmengen von M andere Teilmengen von M (nicht als Element, aber als Teilmenge) enthalten; bei Dummett findet sich das Beispiel eines Rechtecks, das andere Rechtecke als Teile enthält.[99] Auch dort, wo nicht der eine Gegenstand vollständig in dem anderen enthalten ist, sondern bloss manche Teile beiden gemeinsam sind – d. i. bei Überschneidungen –, findet sich mitunter Zählbarkeit; manche Teilmengen von M werden sich nur ein Element, andere alle bis auf eines teilen.

Wie also das Paradigma der Diskretheit, d. s. räumlich abgetrennte Körper, nicht als allgemeines Modell für die Abgegrenztheit zählbarer Gegenstände herangezogen werden darf, ist desgleichen die Rede von der abgrenzenden Kraft des Zählbegriffs nicht anschaulich zu nehmen. Ursache für die räumliche Trennung bei Schafen ist gewiss nicht, wie etwa die Kraft des Wassers für die Spaltung von Gestein, der Schafsbegriff; seine Wirkung trifft allein unsere Auffassung der Sache – nicht die Sache selbst. Der Zählbegriff grenzt die unter ihn fallenden Gegenstände denn auch nur insofern einzeln gegeneinander ab, als er den, der ihn anzuwenden versteht, mit einem allgemeinen Prinzip zur Bestimmung der bei Begriffsanwendung tatsächlich bestehenden Grenzen versorgt; dieses Prinzip, das wir eines der Einheit genannt hatten, gibt einerseits ihrer Art nach die Eigenschaften und Relationen vor, deren Auftreten Grenzen zwischen Verschiedenem anzeigen, andererseits und ebenso ihrer Art nach, wenngleich vielleicht in offenerer Weise, jene, die an ein und demselben Gegenstand auftreten können. Wie viele andere Begriffe, die räumliche Körper unter sich versammeln, gibt auch der Schafsbegriff vor, dass räumliche Trennung innerhalb des betrachteten Seinsausschnitts Grenzen zwischen Verschiedenem anzeigt, wohingegen zum Beispiel Farbunterschiede mitunter an der Oberfläche ein und desselben Schafs auftreten können. Enthält denn, liesse sich nun einwenden, nicht auch der um eine Massangabe ergänzte Wasserbegriff ein Einheitsprinzip, zumal, wie wir sagten, jeder noch so kleine Tropfen eines Zentiliters Wasser diesen von einem anderen scheide? Der Mangel hier besteht jedoch nicht darin, dass sich manche Grenze nicht bestimmen

[99] Vgl. Dummett (1981, S. 549). Alltäglichere Beispiele liefert etwa das sogenannte Shop-in-Shop-Konzept.

liesse, sondern umgekehrt, dass sich dabei Grenzziehungen in unbestimmbarer Vielzahl aufzwingen.

Wo keine wechselhaften Umstände vorherrschen und die Vielheit der zu zählenden Gegenstände durch eine bijektive Liste ihrer Namen gegeben ist, bedarf es freilich keines versammelnden Begriffs, weder um sie nach aussen hin noch gegeneinander abzugrenzen. Schon bei der Besprechung dessen, was wir die logisch-konstruktivistische Auffassung des Zählens nannten, wurde darauf hingewiesen, dass in Logik und Mengenlehre die äussere Abgrenzung mit der Menge der zu zählenden Gegenstände gegeben sei; nicht anders verhält es sich mit der inneren Abgrenzung, was bei Hilbert und Bernays, im ersten Band ihrer *Grundlagen der Mathematik* und in Bezug auf axiomatische Theorien überhaupt, ziemlich treffend ausgedrückt ist, wo es heisst, «die Sonderung der Dinge des Individuenbereichs», die «einer jeden prädikativen Bestimmung gleichsam vorhergeht», werde als bestehend vorausgesetzt.[100] Da nun niemand bestreiten würde, dass sich eine Liste abzählen lässt, scheinen Alston und Bennett Recht zu behalten mit ihrer Kritik an Frege, wonach es für das Zählen eines Begriffs, der die zu zählenden Gegenstände unter sich versammelt und abgrenzt, nicht zwingend bedürfe, zumal erfolgreiche singuläre Referenz auf die Gegenstände hinreiche.[101] Die Zählung der aufgelisteten Gegenstände verrät indes nichts Neues; die dabei ermittelte Anzahl ist, um es mit Wittgenstein zu sagen, eine interne Eigenschaft der Liste: Die Streichung eines Namens oder die Ergänzung eines weiteren macht aus ihr eine andere.[102] Wird nun zudem, wie bei Goodstein (siehe § 7), das Erstellen einer Liste der unter einen Begriff fallenden Gegenstände als Kopiervorgang begriffen, macht es den Anschein, als müsse dem Zählen jedes entdeckerische Moment – wie könnte das Kopieren etwas entdecken? – abgesprochen werden.[103]

Dem Anschein zum Trotz lässt sich durch das Erstellen einer Liste aller unter einen Begriff fallenden Gegenstände, sei es bloss einer primitiven Strichliste – das Kerben selbst erwies sich ja als ein Zählen, weshalb seine Auffassung als blosses Kopieren verworfen wurde –, durchaus das Bestehen von vorerst unbekannten und der Anschauung nicht unmittelbar zugänglichen Sachverhalten feststellen. Schon die zeichenlose Vorform des Zählens macht es möglich, Begriffe auch dort auf ihre Gleichzahligkeit hin zu prüfen, wo das Ausmass ihrer Umfänge das nackte Fassungsvermögen des Menschen bei Weitem übersteigt; weshalb sonst würden die Eingeborenen aus Kleenes Schilderung einen

[100] Hilbert und Bernays (1968, S. 163).
[101] Vgl. Alston und Bennett (1984).
[102] Vgl. *PG*, S. 332.
[103] Tatsächlich ist Goodstein der Ansicht, das Zählen sei kein Prozess, wodurch etwas entdeckt würde, sondern ein Umwandlungsprozess, bei dem die durch Kopieren der abzuzählenden Vielheit erstellte Strich- oder Kerbliste (‹tally›) in ein konventionelles Zahlzeichen umgewandelt werde (vgl. Goodstein (1956, S. 124 f)).

derartigen Aufwand betreiben, wenn sich damit nicht das Bestehen eines ihnen anders nicht zugänglichen Sachverhalts feststellen liesse? Gleichzahligkeit ist, in Anlehnung an Wittgensteins Wortwahl, demnach als externe Beziehung von Begriffen anzusehen; desgleichen lässt sich die Anzahl, die einem Begriff zukommt, im Allgemeinen nicht aus ihm allein ableiten. Um sie zu bestimmen, muss zumeist ein Blick auf die wirklichen Verhältnisse geworfen werden; nicht selten wird sich dabei herausstellen, dass ihm über die Zeit verschiedene Anzahlen zugekommen sind, ohne dass er indessen aufgehört hätte, derselbe Begriff zu sein.

Vom Standpunkt der Arithmetik aus mag das entdeckerische Moment des Zählens verblassen. Der Umfang eines arithmetischen Begriffs ist wie die ihm zukommende Anzahl ein für allemal gesetzt; und ist der Umfang einmal bestimmt, kann, wie es Wittgenstein ausdrückt, «der Begriff sozusagen abtreten.»[104] Zudem scheint das Verhältnis manch eines Begriffs zu seinem Umfang ein internes zu sein; oder könnte etwa dem Begriff $0 < \xi < 10$ eine andere Zahl zukommen als die Neun? Dem Ethnologen dagegen kann mit der Ermittlung der Anzahl Individuen in einer sozialen Gruppe, von der er einen bestimmten Begriff hat, durchaus eine wichtige Entdeckung gelungen sein. Käme fernerhin in der Liste, die er zu diesem Zweck erstellt hätte, derselbe Name zweimal vor, müssten je nachdem, ob dies aus Versehen oder, weil zwei Individuen denselben Namen tragen, geschehen ist, die Einträge anders gezählt werden; daran aber ist ersichtlich, dass auch dem Abzählen einer Liste ein Begriff zugrundeliegt. Wie es möglich sein sollte, mit Erfolg auf, sagen wir, das Exemplar eines Buchs zu referieren, ohne über den passenden Begriff zu gehen, ist mir ein Rätsel; im Beispiel von Alston und Bennett – ‹Jim's copy of *Rasselas*›[105] – wird denn auch kein Eigenname im logischen Sinne angegeben, sondern eine definite Beschreibung, worin der zugrundeliegende Begriff enthalten ist.

§ 24 Die vorprädikative Sonderung der Gegenstände geht in der Logik einher mit der Möglichkeit, auf jeden darunter einzeln zuzugreifen; diese Möglichkeit ist gewährleistet durch den Quantifikationsapparat, dem das negierte Identitätszeichen, wo die Variablen, wie üblich, nicht nach dem Vorschlag Wittgensteins gelesen werden (siehe § 21), wesentlich angehört. Der Gebrauch verschiedener Variablen, die im Schnittbereich der sie bindenden Quantoren ein negiertes Identitätszeichen beidseits flankieren, sichert den Zugriff auf ebenso viele verschiedene Elemente aus dem Gegenstandsbereich; es erübrigt sich hier also der Umweg über Prädikate, um, nachdem ein Gegenstand ausgewählt worden ist, auf einen anderen, und nicht nochmals auf denselben, zuzugreifen. Wie sich

[104] *PG*, S. 332.
[105] Alston und Bennett (1984, S. 560).

jedoch erwies, bedarf der Zählende irgendeines Kennzeichens, das den Graben zwischen den gezählten und den ungezählten Gegenständen anzeigt; wo kein solches vorliegt, kann, selbst wenn der einzelne Zugriff auf keinen der Gegenstände prinzipiell verwehrt ist (siehe § 21), unmöglich gezählt werden. Von der Logik wird diese Bedingung an die Zählbarkeit gleichsam verschluckt und es fragt sich, ob dies noch für weitere, den Zugriff auf einzelne Gegenstände betreffende Bedingungen gilt. Im verbleibenden Teil dieser Arbeit soll daher der Frage nachgegangen werden, welches die äusseren, nicht die begrifflichen, Bedingungen der Möglichkeit sind, einen Gegenstand unter vielen herauszugreifen.

Von dem Ersten Konzil zu Nicäa, das um 325 aus Anlass des arianischen Streits von Kaiser Konstantin dem Grossen einberufen worden war, ist eine philosophisch anmutende Legende überliefert, die sich um die Zählung der anwesenden Bischöfe rankt:[106]

> [A]udivimus tempore Concilii, episcopis omnibus sedentibus in thronis, qui numerabant eos, invenisse CCCXVIII episcopos in thronis suis sedentes: sed assurgentibus eis et stantibus, CCCXIX inveniebant, uno insuper addito. Quapropter nullo modo discernere poterant quanta esset eorum numeri plenitudo, neque ejus qui supererat nomen dignoscebant; sed quando veniebant ad eum numerantes, assumebat faciem vicini sui. Denique res ipsa revelata est quibusdam, scilicet Spiritum sanctum esse (trecentesimum) decimum nonum, eos adjuvantem ad rectam fidem stabiliendam. Quamobrem dictum est eos fuisse plures quam CCCXVIII.

Die Zählung der Bischöfe habe demnach in dem einen Zustand, als ein jeder Bischof auf seinem Thron sass, die Zahl 318 ergeben, wohingegen dieselben Zählenden auf einen zusätzlichen, d. i. auf 319 Bischöfe, gekommen seien, alsbald diese aufgestanden waren. Daher sei es ihnen, den Zählenden, in keiner Weise möglich gewesen zu entscheiden, wieviel die Zahl der Bischöfe bei Vollzähligkeit betrug. Den Namen des zusätzlichen Bischofs indes kannten sie nicht, und jedes Mal, wenn sie zählend zu ihm gelangten, habe er die äussere Erscheinung seines Nachbarn angenommen.

Einen Bestandteil des Untergrunds, dem diese Legende entwachsen ist, scheint mir, wenn nicht ein Zähltabu, so doch zumindest eine gewisse Abneigung gegen das Zählen zu bilden; sie selbst wiederum würde auf Anschauungen fussen, wonach sich die *profanitas* einer gewöhnlichen Zählung mit der Heiligkeit der zu zählenden Sache nicht vertrage, ja sie geradezu vertreibe, wie auch der Heilige Geist sich einer solchen entzog. Unverständlich bliebe indessen, dass er sich im erhobenen Zustand trotzdem zählen liess, was die Vermutung nahelegt, die obige Passage gebe die Legende nur unvollständig wieder. Und tatsächlich heisst es in einer anderen Überlieferung, die Zählung der anwesenden, d. i. der Einsitz nehmenden, Bischöfe habe 318 ergeben, jene der bei den Wahlgängen von

[106] Pitra (1852, S. 523). Whitehead erwähnt die Legende in dem von ihm verfassten Eintrag ‚Mathematics' in der *Encyclopædia Britannica* von 1911.

den hierzu aufgestandenen Teilnehmern abgegebenen Stimmen hingegen 319.[107] Dieser zweiten Fassung nach wäre anstelle der dritten trinitarischen Person die durch sie abgegebene Stimme gezählt und auf diese Weise, wenngleich ohne Absicht, der anrüchige Zählakt umgangen worden. Im Gegensatz aber zu den (in § 4) erwähnten Umgehungen handelt es sich hier nicht um eine von Zählenden ersonnene Strategie, um doch noch an durch ein Verbot versperrte Information zu gelangen; die Anwesenheit des Heiligen Geistes scheint zunächst überhaupt nicht bemerkt worden zu sein. Vielmehr ist es hier die zu zählende Sache selbst, die sich der kurz bevorstehenden Zählung entzieht, indem sie, wie es heisst, die äussere Erscheinung ihres Nachbarn annehme, wodurch die Zählenden sie nicht als von diesem verschieden zu erkennen und daher nicht einzeln zu zählen vermögen. Das Zählhindernis ist hier also fehlende Unterscheidbarkeit.

Auch bei Frege gilt die Unterscheidbarkeit der Gegenstände als notwendige Bedingung dafür, sie zählen zu können. Er schreibt: «Wenn man die zu zählenden Dinge Einheiten nennt, so ist die unbedingte Behauptung, dass die Einheiten gleich seien, falsch. Dass sie in gewisser Hinsicht gleich sind, ist zwar richtig aber werthlos. Die Verschiedenheit der zu zählenden Dinge ist sogar nothwendig, wenn die Zahl grösser als 1 werden soll.»[108] Offenbar meint Frege mit ‚verschieden sein' dasselbe wie mit ‚nicht durchaus gleich sein', was aus anderen Stellen ausdrücklicher noch hervorgeht: «Jedenfalls sind *nie* zwei Gegenstände durchaus gleich»; folglich nennen wir «den Gegenstand eben nur darum einen andern, weil wir ihn vom ersten unterscheiden können.» Dazu passt natürlich, dass er sich, zumindest in den *Grundlagen*, Leibniz' Definition der Identität – «‹Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate›» – als, wie er sagt, Erklärung für die Gleichheit aneignet, und zwar in der starken Lesart, wonach identisch sei, was sich überall *salva veritate* füreinander ersetzen lässt.[109] Der Idee nackter Verschiedenheit, d. i. einer Beziehung des Verschiedenseins unter Gegenständen, die durch kein unterscheidendes Kennzeichen angezeigt würde, scheint Frege nichts abgewinnen zu können; Jevons' Ausdruck der *empty form of difference*, d. i. für das, was nach Abstraktion des speziellen Charakters der Verschiedenheit zwischen den Dingen einer Vielheit und unter Beibehaltung einzig ihres Vorhandenseins übrig bleibt, lehnt er jedenfalls ab.[110]

---

[107] Vgl. Kalin (1971, S. 547).

[108] *GA*, § 45. Die beiden folgenden Zitate stammen aus den §§ 34, 36.

[109] § 65. Dafür, dass er Leibniz' Grundsatz nicht bloss als notwendige Bedingung liest, spricht einmal, was er am Ende des betreffenden Absatzes sagt: «In der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten»; und zudem die Verwendung, die er in diesem und den darauffolgenden Paragraphen von ihm macht. Später, in der Rezension Husserls, wird er der Gleichheit die Definierbarkeit absprechen (vgl. *RH*, S. 184 (320)).

[110] Vgl. *GA*, § 44. Von einigem Interesse, zwar nicht für diese, aber vielleicht für andere Untersuchungen scheint mir indes die damit einhergehende Weigerung, die Zahlangabe ‚die Erde hat zwei Pole' als

Die Unterscheidbarkeit, welche für das Zählen erforderlich ist, muss indessen nicht immer solcher Art sein, dass sich eine intrinsische Eigenschaft angeben liesse, die das eine von dem anderen Element der zählbaren Vielheit unterscheidet. Dies bringt Frege besonders klar zum Ausdruck, wo er schreibt:[111]

> Nur für sich, ohne Rücksicht auf ihre räumlichen Beziehungen sind die Raumpunkte einander gleich. Soll ich sie aber zusammenfassen, so muss ich sie in ihrem räumlichen Zusammensein betrachten, sonst schmelzen sie unrettbar in Einem zusammen.

Desgleichen mögen die Schläge der Kirchenglocke, um ein früheres Beispiel wieder aufzunehmen, je für sich gehört, ohne Rücksicht auf ihr Aufeinanderfolgen in der Zeit, alle ununterscheidbar gleich erschallen, ohne deswegen, nacheinander gehört, unzählbar zu sein. Wie Frege in Bezug auf das zeitliche Nacheinander richtig bemerkt, kann es immer nur als sekundäres Kennzeichen dienen, zumal eine durch die Zählung – oder eher: Nummerierung – induzierte Ordnung in der Zeit die Unterscheidbarkeit der gezählten Gegenstände voraussetzt: «[W]enn die gezählten Gegenstände nicht wirklich auf einander folgen, sondern nur nach einander gezählt werden, so kann die Zeit nicht der Grund der Unterscheidung sein. Denn, um sie nach einander zählen zu können, müssen wir schon unterscheidende Kennzeichen haben.»[112]

Verschiedenheit ist eine Beziehung, deren Bestehen sich nur auf Umwegen erkennen lässt; wo nicht kurzerhand festgelegt worden ist, dass sie besteht, bedarf es, um Dinge als verschiedene erkennen zu können, eines Kennzeichens, das ihr Verschiedensein anzeigt, d. i. eines unterscheidenden Kennzeichens. Was hierfür in Betracht kommt, hängt von der Art der Dinge ab, deren Verschiedensein es zu erkennen gilt; da Verschiedenheit in allen Seinsbereichen – nach dem Konzil zu Nicäa ja selbst bei Gott, dem Einen – anzutreffen ist, vermögen insgesamt die unterschiedlichsten Eigenschaften und Relationen der Unterscheidung zu dienen. Im Gebiet des Zählbaren, liefert, wie wir gesehen haben, der Begriff, durch den die zu zählenden Gegenstände betrachtet werden, das Prinzip, nach dem sich entscheidet, was als unterscheidendes Kennzeichen anzuschauen ist und was nicht(; dass mitunter verschiedene Zählbegriffe ihr Prinzip der Einheit gemeinsam haben, dürfte klar sein). Mangelnde Unterscheidbarkeit ist indes nicht immer auf einen begrifflichen Mangel zurückzuführen, zumal ein solches Prinzip zwar vorgibt, was mögliche Kennzeichen wären, nicht aber, ob diese im besonderen Fall auch vorliegen; darüber entscheiden letztlich die äusseren Umstände, und diese können so gelagert sein, dass nicht alle Kennzeichen, sondern allein solche bestimmter Form, und darunter auch nur

gleichbedeutend mit einem Verschiedenheitssatz, d. i. mit ‚der Nordpol ist vom Südpol verschieden', anzusehen.

[111] *GA*, § 41.

[112] *GA*, § 40.

die schwer erkennbaren, vorliegen, mithin die Grenzen zwischen Gegenständen, die sich unter anderen Umständen mühelos auseinanderhalten liessen, kaum noch angezeigt werden. Je nach Umständen herrschen offenbar verschiedene Grade der Unterscheidbarkeit vor; ein bloss schwacher Grad an Unterscheidbarkeit zwischen Gegenständen kann, wie Frege an einem Beispiel darlegt, ihre Zählung erschweren: «In der That erschwert zuweilen die zu grosse Aehnlichkeit z. B. der Stäbe eines Gitters die Zählung.»[113] Im Grenzfall, so scheint es, könnten die Umstände jede Möglichkeit der Unterscheidung unterbinden und mithin das Zählen ganz verhindern.

Grade der Unterscheidbarkeit

§ 25 In seinem Aufsatz ‚Grades of discriminability' definiert Quine drei Grade der Unterscheidbarkeit in Bezug auf eine interpretierte formale Sprache erster Stufe:[114] Er nennt zwei Gegenstände (i) stark unterscheidbar, falls es in besagter Sprache eine offene Aussage in einer freien Variablen gibt, die von dem einen Gegenstand, nicht aber von dem andern erfüllt wird; (ii) moderat unterscheidbar, falls es eine offene Aussage in zwei freien Variablen gibt, die von den zwei Gegenständen in der einen Anordnung, nicht aber in der andern erfüllt wird; und (iii) schwach unterscheidbar, falls es eine offene Aussage der Form ‚$Fx \,.\, {\sim}Fy$' gibt, die von den zwei Gegenständen erfüllt wird. Das Graduelle liegt in den logischen Folgerungsverhältnissen; aus starker Unterscheidbarkeit folgt moderate und daraus wiederum schwache, nicht aber umgekehrt moderate aus schwacher oder starke aus moderater. Dies mag gerade im Hinblick auf die äusseren Grade erstaunlich anmuten, zumal die beiden Definitionen, wie Quine selbst anmerkt, gleichwertig scheinen; die ausschlaggebende Nuance besteht gleichwohl darin, dass bei starker Unterscheidbarkeit die den Unterschied anzeigende Aussage Vorkommnisse nur einer freien Variablen enthalten darf. An einem vieldiskutierten Beispiel aus der Mathematik lässt sich der Unterschied gut veranschaulichen.

Fragt man etwas unbedarft nach *der* Wurzel einer positiven reellen Zahl r, hat man vielleicht die ebenfalls positive reelle Zahl s im Sinn, welche die Gleichung ‚$x^2 = r$' erfüllt; denn nebst s ist ihr negatives Gegenstück t die zweite reelle Lösung. Da die asymmetrische Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ eine totale ist, wird die offene Aussage ‚$x<y$' von beliebigen zwei reellen Zahlen in der einen und nicht in der andern Anordnung erfüllt. In unserem Beispiel ist ‚$t<s$' wahr und ‚$s<t$' dagegen falsch, was die beiden Wurzeln moderat voneinander unterscheidet; durch die offene Aussage ‚$0<x$' sind sie indessen sogar stark unterscheidbar, was aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ für jedes Paar ungleicher re-

[113] *GA*, § 35.
[114] Vgl. Quine (1976).

eller Zahlen gilt. Anders stellt sich die Lage bei negativen reellen Zahlen dar; um hier eine Antwort auf die Frage nach der Wurzel geben zu können, ist eine Erweiterung des Lösungsraums auf den Körper der komplexen Zahlen erforderlich. Obgleich $\mathbb{C}$ nicht als Körper angeordnet werden kann, ordnet die Betragsnorm jeder komplexen Zahl eine reelle zu; die dadurch induzierte Struktur auf $\mathbb{C}$ ist zwar asymmetrisch, jedoch nicht total und somit auch nicht linear, zumal jeder komplexen Zahl derselbe Betrag zugeordnet ist wie ihrem konjugierten Gegenstück;[115] insbesondere ordnet sie den beiden Wurzeln von -1, für die sich die Bezeichnungen ‚i' und ‚$-i$' eingebürgert haben, denselben Betrag zu, weshalb sie in Bezug auf jene Struktur nicht zu unterscheiden sind. Da es sich bei der Konjugation, um einen Körperautomorphismus handelt, der eine jede komplexe Zahl auf ihr konjugiertes Gegenstück und dieses zurück auf sein eindeutiges Urbild abbildet, insbesondere i auf $-i$ und $-i$ zurück auf i, sind, wie aus § 27 hervorgehen wird, die beiden Wurzeln von -1 in der Sprache der komplexen Zahlen nicht moderat und damit erst recht nicht stark unterscheidbar. Dennoch sind sie, wie sich leicht einsehen lässt, nicht gänzlich ununterscheidbar. Man kürze hierzu die offene Aussage ‚$x + y = 0$', die von keiner Zahl ausser der Null reflexiv, d. h. von keinem reflexiven Paar ausser $\langle 0, 0\rangle$, erfüllt wird, mit ‚Gx' ab; die daraus zusammengesetzte Aussage ‚$Gx \,.\, {\sim}Gy$', d. i. in ihrer artikulierten Form ‚$x + y = 0 \,.\, {\sim}(y + y = 0)$', wird offensichtlich von den Paaren $\langle i, -i\rangle$ und $\langle -i, i\rangle$ erfüllt, nicht aber von $\langle i, i\rangle$ oder $\langle -i, -i\rangle$.[116]

Es ist das freie, in ‚Gx' freilich verschluckte Vorkommen der Variablen ‚y', welches hier die Unterscheidbarkeit ausmacht und sie zugleich als schwache auszeichnet; denn bei starker Unterscheidbarkeit darf in der Aussage, woran sich die Gegenstände scheiden, keine andere als die an Argumentstelle angezeigte Variable vorkommen. Das Beispiel legt ausserdem eine gleichwertige und gleichwohl prägnantere Definition des schwächsten Unterscheidbarkeitsgrades nahe, von der auch Quine am Ende seines Aufsatzes berichtet; ihr nach sind zwei Gegenstände genau dann schwach unterscheidbar, wenn es in der betreffenden Sprache eine offene Aussage in zwei freien Variablen gibt, die von ihnen zusammen, nicht aber reflexiv von jedem einzelnen erfüllt wird. Quine meint, es genüge zu fordern, dass die offene Aussage von einem der beiden zu unterscheidenden Gegenstände reflexiv falsch sei, was auf den ersten Blick in die Irre führen könnte, da, um es an unserem Beispiel zu veranschaulichen, in der Aussage ‚Gy', d. i. in ‚$y + y = 0$', nur

[115] Ist eine komplexe Zahl z gleich $a + ib$, für $a, b \in \mathbb{R}$, so ist ihr konjugiertes Gegenstück $\bar{z}$ gleich $a - ib$. Die sich aus der Betragsgleichheit ergebenden Äquivalenzklassen enthalten freilich nicht allein konjugierte Paare.

[116] Vgl. Ladyman (2005, S. 220). Infolge von Shapiro (1997) ist eine lebhafte Diskussion bezüglich Systemen, deren Struktur nicht-triviale Automorphismen erlauben, entbrannt. Der eben zitierte Aufsatz Ladymans ist ein Beitrag dazu. In einem der neueren Beiträge, Shapiro (2008), findet sich eine ausführliche Literaturangabe.

eine Variable frei vorkommt; erfüllte nun allein das eine, nicht aber das andere reflexive Paar die Aussage, wären die Gegenstände nach der ersten Definition bereits stark unterscheidbar. Ähnliches ist in Bezug auf die Forderung zu sagen, ‚Gx' müsse von den zu unterscheidenden Gegenständen zusammen erfüllt werden, was dreierlei bedeuten könnte: Die offene Aussage werde von $\langle i, -i \rangle$ oder $\langle -i, i \rangle$; von $\langle i, -i \rangle$, nicht aber $\langle -i, i \rangle$, oder von $\langle -i, i \rangle$, nicht aber $\langle i, -i \rangle$; oder von $\langle i, -i \rangle$ und $\langle -i, i \rangle$ erfüllt. Es scheidet die mittlere Lesart sofort aus, da ansonsten schwache und moderate Unterscheidbarkeit zu ein und demselben Grad verschmölzen. Quine kommt mit der offeneren ersten Lesart aus, weil es, um schwache Unterscheidbarkeit zwischen zwei Gegenständen nachzuweisen, hinreicht, eine offene Aussage anzugeben, die von einem der beiden irreflexiven Paare erfüllt und von einem der beiden reflexiven Paare nicht erfüllt wird; sollte sich fernerhin herausstellen, dass sie von dem anderen irreflexiven Paar falsch oder von dem anderen reflexiven Paar wahr ausgesagt wird, wären die Gegenstände darüber hinaus als moderat respektive stark unterscheidbar einzustufen.

Es geht Quine also nicht darum, den Zustand *bloss* schwacher Unterscheidbarkeit, wodurch stärkere Grade ausgeschlossen würden, zu definieren; wie sich leicht einsehen lässt, impliziert der stärkste Unterscheidbarkeitsgrad den mittleren und dieser den schwächsten. Denn sollten zwei Gegenstände a und b stark unterscheidbar sein, hielte die betreffende Sprache eine Aussage ‚Hx' in einer freien Variablen bereit, die von a, nicht aber von b erfüllt würde; an der mit ‚Sxy' abgekürzten Aussage ‚$Hx \,.\, {\sim} Hy$' liessen sich sodann die beiden Gegenstände moderat unterscheiden; die Disjunktion ‚$Sxy \vee Syx$' in ebenfalls zwei freien Variablen würde schliesslich sowohl von $\langle a, b \rangle$ und $\langle b, a \rangle$ wahr als auch von $\langle a, a \rangle$ und $\langle b, b \rangle$ falsch ausgesagt. Daran ist überdies zu ersehen, dass die Folgerungsverhältnisse zwischen den Unterscheidbarkeitsgraden selbst bei Annahme der dritten Lesart erhalten bleiben. Wenn nun aber zwei Gegenstände im Sinne der ersten Lesart schwach unterscheidbar sind, sind sie entweder zugleich moderat unterscheidbar oder sie sind es nicht; im zweiten Fall darf, da keine moderate und so auch keine starke Unterscheidbarkeit herrscht, die sie schwach unterscheidende Aussage weder von einem der reflexiven Paare erfüllt noch von einem der irreflexiven Paare nicht erfüllt werden; und im ersten Fall kann, wie eben vorgeführt, eine Aussage zusammengestellt werden, die sich in Bezug auf die vier Gegenstandspaare so verhält, wie es die dritte Lesart fordert. Also ist sie zu der ersten, nicht aber zu der mittleren Lesart gleichwertig. Zu erstaunen vermöchte dies nur, wer irrtümlich meinte, die Bedingung, von zwei geordneten Paaren erfüllt zu werden, fordere von der offenen Aussage mehr als die Bedingung, von nur einem darunter erfüllt zu werden. Es genügt in Erinnerung zu rufen, dass aus mengentheoretischer Sicht geordnete Paare komplexer sind als ungeordnete; im Gegensatz zum ungeordneten weist das geordnete Paar eine Richtung auf (siehe § 10), die beim Versuch, es als Menge zu definieren, berücksichtigt werden muss, was sich, wie die Geschichte gezeigt hat, auf sehr unterschiedliche Weise umsetzen lässt.[117]

Quines Definitionen der Unterscheidbarkeit zeichnen sich durch die Verknüpfung zweier Urteile, d. i. eines affirmierenden mit einem negierenden, gemeinsam aus; übereinstimmend zur landläufigen Auffassung des Unterscheidens wird der einen Sache zugesprochen, was der anderen wiederum abgesprochen wird. Über das Landläufige hinaus reichen sie aber deshalb, weil es sich bei dieser „Sache" nicht allein um einen Gegenstand handeln muss, sondern desgleichen um ein Paar von solchen handeln kann. Um diese Gemeinsamkeit herauszustreichen und auch die obigen Feststellungen einfliessen zu lassen, seien die drei Grade der Unterscheidbarkeit in einer leicht abgeänderten Formulierung hier noch einmal definiert. Zwei Gegenstände a und b aus dem Gegenstandsbereich einer interpretierten formalen Sprache erster Stufe $\mathcal{L}$ heissen

> stark unterscheidbar, falls es in $\mathcal{L}$ eine offene Aussage ‚Fx' in einer freien Variablen gibt, sodass ‚$Fx \centerdot {\sim}Fy$' von $\langle a, b\rangle$ erfüllt wird;
> moderat unterscheidbar, falls es in $\mathcal{L}$ eine offene Aussage ‚Rxy' in zwei freien Variablen gibt, sodass ‚$Rxy \centerdot {\sim}Ryx$' von $\langle a, b\rangle$ erfüllt wird;
> schwach unterscheidbar, falls es in $\mathcal{L}$ eine offene Aussage ‚Sxy' in zwei freien Variablen gibt, sodass ‚$Sxy \centerdot {\sim}Sxx$' von $\{a, b\}$ erfüllt wird.

Eine weitere Definition Quines einbauend, heisse ein Gegenstand aus dem Gegenstandsbereich von $\mathcal{L}$ spezifizierbar, falls er von allen anderen darin stark unterscheidbar ist; im endlichen Fall – und nur dieser kommt hier in Betracht – trifft dies genau dann zu, wenn $\mathcal{L}$ eine offene Aussage in einer freien Variablen bereithält, die einzig von besagtem Gegenstand erfüllt wird.[118]

§ 26 Natürlich stellt sich nun die Frage, welchen Grad an Unterscheidbarkeit die Elemente einer Vielheit mindestens aufweisen müssen, damit sie abgezählt werden kann. Es wird sich, um es gleich vorweg zu sagen, auf den wenigen Seiten, die uns verbleiben, keine auch nur annähernd zufriedenstellende Antwort mehr geben lassen. Daher sollen lediglich noch einige Punkte Erwähnung finden, die es bei der Suche nach einer Antwort zu berücksichtigen gälte.

Einige Male schon wurde im Laufe dieser Arbeit die schlichte Einsicht eingebracht, dass unser Hirte – um ein letztes Mal zu ihm zurückzukehren – seine Schafe nicht einzeln

[117] Vgl. hierzu kritisch Dipert (1982).

[118] Andernfalls stelle starke Unterscheidbarkeit gegenüber allen anderen Gegenständen, wie Quine sagt, Spezifizierbarkeit im Unendlichen sicher (vgl. Quine (1976, S. 129)).

zu kennen, d. i. über keine dauerhaften Kennzeichnungen zu verfügen, brauche, um sie zählen zu können. Damit ihm die Durchführung seines allabendlichen Rituals gelingen kann, muss der Hirte demnach nicht in der Lage sein, jedes Viehstück aus der Herde – um es in neuen Worten zu sagen – über die wechselhaften Umstände hinweg einzeln zu spezifizieren. Gleichwohl dürfte aus dem Gesagten auch klar geworden sein, dass zwischen den bereits gezählten und den noch ungezählten Gegenständen stets starke Unterscheidbarkeit zu herrschen hat. Zweifellos gehört das Prädikat ‚x ist gezählt', worin nur eine Variable auftritt, zur Sprache eines jeden sprachbegabten Zählenden;[119] seine Extension muss er an ein Kennzeichen geknüpft haben, das ihm den Graben zwischen Gezähltem und Ungezähltem anzeigt. Wie es sich indes innerhalb der Lager je verhält, darüber wurde bis anhin nicht mehr als die vage Vermutung geäussert, ein zu schwacher Grad an Unterscheidbarkeit unter den zu zählenden Gegenständen könnte das Zählen verhindern.

Von seinem Standpunkt aus wird der Hirte beim Zählen das Lager der noch ungezählten Schafe gewiss gut zu überblicken vermögen; unklug wäre es ja, aufgrund mangelnden Überblicks ein davonlaufendes Schaf zu übersehen. Und in Bezug auf jenen Standpunkt wird sich, ungeachtet der Tatsache, dass er dauerhafter Kennzeichnungen entbehrt, jedes vor dem Stall versammelte Schaf aufgrund der räumlichen Lage zu ihm kennzeichnen lassen; hält die Hirtensprache die nötigen Ausdrücke bereit, dürfte es ihm daher zu jedem Zeitpunkt der Zählung möglich sein, ein beliebiges ungezähltes Schaf von jedem anderen stark zu unterscheiden. Für die bereits im Stall befindlichen Schafe trifft dies, obgleich im Prinzip auch hier jedes darunter durch seine räumliche Lage zum Hirten spezifizierbar wäre, nicht zu; auch wenn die sprachlichen Mittel vorhanden sind – sie lassen sich von ausserhalb der Stallung nicht anwenden. In ganz ähnlicher Lage, nur diesmal in Bezug auf das Lager der ungezählten Gegenstände, befände sich auch unser Sortes, falls ihm untersagt würde, in den zugedeckten Korb voller Äpfel zu greifen. Wie liesse sich da etwas unterscheiden, geschweige denn einzeln auf die verborgenen Gegenstände zugreifen? Nun wäre es aber durchaus denkbar, dass Sortes nebst dem Leergewicht des Korbs auch das Einzelgewicht der Äpfel – das, wie wir uns erinnern, bei allen gleich ist – kennt; das Wägen des Korbs gäbe ihm in diesem Fall Aufschluss über die Zahl der darin enthaltenen Äpfel. Es scheint also mitunter auch Wege zu geben, um die Anzahl einer Vielheit zu ermitteln, wo die Umstände eine Unterscheidung ihrer Elemente nicht zulassen. Manche jedoch wären vielleicht geneigt, dagegen einzuwenden, dass die Äpfel im Korb aufgrund der zusätzlichen Information selbst von aussen her unterscheidbar sind;

[119] Desgleichen müssten auch bei sprachloser Zählung die gezählten Gegenstände irgendwie als solche markiert sein. Zählen ist also wesentlich eine semiotische Tätigkeit.

immerhin werde, unter der Annahme, dass ein Apfel 200g wiegt, die Aussage ‚x wiegt mit y 400g' von jedem irreflexiven und von keinem reflexiven Apfelpaar erfüllt. Unklar bleibt indes, ob die Brücke zur Zählbarkeit geschlagen werden darf; es scheint mir hier weder ein Moment des Herausgreifens noch eines des Weglegens an der Ermittlung der Anzahl beteiligt zu sein.[120]

Ohnehin stellt die Legende aus Nicäa eine andere Situation dar. Das komplexe Ding, bestehend aus dem letzten Bischof in der Thronreihe und dem Heiligen Geist, scheint keine für die Zählenden erkennbare Eigenschaft zu besitzen, die es als Komplex ausweisen würde; ebenso gut könnte es sich um einen einfachen Bischof handeln. Die beiden Bestandteile sind, im ursprünglichen Sinne des Wortes, ineinander verschränkt, d. h. von ein und derselben äusseren Schranke umgeben und nach aussen hin abgegrenzt, wohingegen nach innen keine Schranke zwischen Verschiedenem erkennbar ist. Trotzdem gelingt es, wenngleich nur über Umwege, den Heiligen Geist und seinen bischöflichen Nachbarn einzeln zu zählen; denn sie haben bei Stimmabgabe verschiedene Spuren hinterlassen. Unter Einbeziehung dieser Spuren werden die zwei ansonsten verschränkten Personen auf einmal unterscheidbar. Bei Wahrung des Wahlgeheimnisses würde ihre Unterscheidung einzig in der Verschiedenheit der abgegebenen Wahlzettel gründen, zumal dann über diese die Stimmenden nicht einzeln zurückverfolgt werden könnten; mithin würde es sich, da keine weiteren Mittel der Unterscheidung zuhanden scheinen, um bloss schwache Unterscheidbarkeit handeln. (Hier wäre es ein Leichtes dem Irrtum zu verfallen, wonach die beiden Personen durch die Aussage ‚x hat seinen Wahlzettel vor y abgegeben' moderat unterscheidbar seien; an den Zetteln jedoch wird sich die zeitliche Abfolge ihrer Abgabe im Allgemeinen nicht nachvollziehen lassen. Dagegen dürfte es den Zählenden nicht schwer fallen, die verschiedenen Wahlzettel auseinanderzuhalten; die Unterscheidung der Stimmenden durch die irreflexive Aussage ‚x hat einen anderen Wahlzettel eingelegt als y' bedarf denn auch keiner anderen Quelle).

Sicherlich liesse sich gegen diese Sichtweise nun einwenden, nicht Personen würden hier herausgegriffen und weggelegt, sondern vielmehr würden die abgegebenen Zettel einer Zählung unterliegen, aus deren Ergebnis dann wiederum die Personenzahl abgeleitet sei; und dass die Zählenden es vermögen, die Zettel stark voneinander zu unterscheiden, würde niemand bestreiten. Andererseits wurde schon einmal davor gewarnt, die Rede vom Herausgreifen allzu anschaulich zu nehmen. Natürlich lässt sich, was mit der Hand zu greifen ist, spezifizieren und zählen; aber muss denn, bei gegebenen Umständen, stets

[120] Es fragt sich weiterhin, ob der Ausdruck ‚x wiegt mit y 400g' durch die Einsetzung derselben Variablen an den Argumentstellen überhaupt zu einem sinnvollen Satz ergänzt werden kann, und ob er nicht viel eher seiner Form nach die Einsetzung fremder Variablen erfordert.

auf alles Zählbare ein unmittelbarer Zugriff möglich sein? Wenn die Antwort auf die zuvor gestellte Frage nicht von vornherein lauten soll, es seien nur Vielheiten spezifizierbarer Gegenstände zählbar, müssen wir uns auf das Denken einer Vielheit von Gegenständen, die voneinander nicht stark unterscheidbar sind, einlassen; der Zugang zu solchen kann aber, sofern unser Eindringen den Zustand geringer Unterscheidbarkeit nicht sogleich wieder aufheben soll, immer nur über Umwege geschehen. Ausserdem gilt es die vielfältige Verflechtung des Zählens mit dem Prinzip der Stellvertretung in Erinnerung zu rufen, angesichts derer es durchaus nicht abwegig erscheint, die Zählung der abgegebenen Wahlzettel mitsamt jener auf bestimmten Annahmen beruhenden Ableitung als eine, wenngleich zusammengesetzte Zählhandlung anzusehen, deren Gegenstände nicht etwa die Zettel, sondern die tatsächlich dahinter stehenden Personen bilden. In dieser Ansicht geben die angedeuteten Annahmen gleichsam den Takt vor; wo jede zu zählende Person nicht einen, sondern, sagen wir, zwei Zettel in die Urne geworfen hat, sind diese paarweise zu zählen. Wo hingegen verschiedene nur einen Zettel abgegeben haben, lässt sich die Zählung ohne Rückgriff auf andere Mittel nicht länger durchführen.

Ob sich zwei Gegenstände unterscheiden, d. i. als verschiedene erkennen, lassen, hängt, wie inzwischen hinreichend klar geworden sein dürfte, von den Umständen ab; in einem weiten Sinne des Wortes fallen darunter – nebst den Eigenschaften der Gegenstände, die ihnen akzidentell zukommen, und den Relationen, die zwischen ihnen bestehen – auch die Beziehungen der Gegenstände zum unterscheidenden Subjekt, das hier immer zugleich ein zählendes ist. Jenen Standpunkt, den der Zählende gerade einnimmt, eröffnet ihm einen bestimmten Zugang zu den Gegenständen und verschliesst hingegen andere; in Bezug auf seinen Standpunkt sind ihm die Gegenstände, um eine Redeweise Freges aufzunehmen, auf bestimmte Art(en) gegeben und auf andere nicht.[121] Welche Arten des Gegebenseins überhaupt in Betracht kommen, hängt demnach auch von den Umständen, und insbesondere von dem eingenommenen Standpunkt, ab(; abends kann mir die Venus nicht als der Morgenstern, d. i. als der hellste Stern am Morgenhimmel, gegeben sein). Indem etwa unser Hirte durch das Eintreten in den Stall seinen Standpunkt gegenüber den Schafen änderte, käme er auf einmal in die Lage, die darin befindlichen Tiere ebenso stark unterscheiden zu können, wie zuvor die draussen versammelten. Unterscheidbarkeit ist – und mit ihr die Zählbarkeit – zuerst nur als etwas Intentionales zu begreifen.[122]

[121] Vgl. *SB*, S. 26 (143).

[122] Williamson bringt in *Identity and Discrimination* Gleiches oder Ähnliches zum Ausdruck, wo er schreibt: «One's ability to discriminate between a and b will in general be sensitive to the ways in which they are presented to one; even one's ability to discriminate between colours depends upon the light in which one sees them. However, sense can always be made of the non-intentional rea-

Was hier *faute de mieux* unter dem Begriff der Intentionalität versammelt sei, beschränkt sich indessen nicht darauf, dass die Möglichkeit der Unterscheidung zweier Gegenstände von der Art ihres Gegebenseins und damit auch von dem eingenommenen Standpunkt (sowie freilich von der individuellen Erkennungskraft des Subjekts) abhängt; allein schon die Einbeziehung des Subjekts als weiterer Gegenstand kann im betrachteten System neue Quellen der Unterscheidbarkeit erschliessen. Im Beispiel der Kirchenglocke sind zwar die einzelnen Schläge bereits durch die zeitliche Lage zueinander spezifizierbar – der erste Glockenschlag hat als einziger keinen Vorgänger, während der zweite als einziger einen vorgängerlosen Vorgänger hat, etc. –; doch wenn wir uns die Glockenschläge in einer Reihe ohne Anfang und ohne Ende zeitlich aufeinanderfolgend denken, sind sie für sich zusammen betrachtet nur noch moderat unterscheidbar. In Bezug auf ein zählendes Subjekt, das manche der endlos aneinandergereihten Schläge erschallen hörte, sind sie wiederum spezifizierbar; denn zu jedem Zeitpunkt gibt es einen Glockenschlag, der ihm als letzter zu Ohren gekommen ist, und einen weiteren, der ihm als nächster zu Ohren kommen wird. Mitunter scheint es, als schüfe der Zählende durch sein Eindringen in das System die Bedingungen der Unterscheidbarkeit – und mit ihnen jene der Zählbarkeit – gleich selbst. Als sich uns aber die Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit, einen Gegenstand unter vielen herauszugreifen, stellte, schien – zumal wir von der Logik her dorthin gelangten – klar, dass es um Bedingungen gehen würde, die unbeschadet jedes Eindringens zu herrschen hätten.

Es drängt sich uns also eine Betrachtungsweise auf, die Wittgenstein in einer seiner *Vermischten Bemerkungen* vortrefflich eingefangen hat: «Es ist – glaube ich – der Weg des Gedankens, der gleichsam über die Welt hinfliege und sie so lässt, wie sie ist – sie von oben vom Fluge betrachtend.»[123] Es handelt sich um ein Betrachten der Dinge, wie sie unbetrachtet sind, um ein Zugreifen, das selbst keine Spuren hinterlässt. Die Betrachtung „von oben" eröffnet dem Betrachter überdies alle Zugänge, die unter den gegebenen Umständen möglich sind – alle Arten, in denen die einzelnen Gegenstände solchenfalls gegeben sein können. Daher handelt es sich nicht um ein Betrachten von Gegenständen unter allen möglichen Umständen, über alle möglichen Welten hinweg; die gleichsam festgefrorenen Umstände sind dem allwissenden Betrachter vollständig gegeben.

Quines Begriffe genügen diesen Anforderungen nicht, da sie die Grade der Unterscheidbarkeit in die Abhängigkeit der gewählten Sprache treiben; es können nämlich in

ding [of ‚discriminate'] in terms of the intentional one, if only by the stipulation that *a* and *b* are discriminated non-intentionally if and only if there are modes of presentation under which they are discriminated intentionally» (Williamson (2013, S. 9)).

[123] *VB*, S. 456.

der einen Sprache zwei Gegenstände voneinander unterscheidbar sein, die in der anderen als verschränkte Einheit auftreten. (Man könnte sagen, Quines Begriffe verhielten sich über verschiedene Sprachen hinweg intensional; denn es können ‚a' und ‚b' in zwei Sprachen dieselben verschiedenen Gegenstände bedeuten, obschon a und b in nur einer der beiden unterscheidbar sind.) Im vorletzten der noch verbleibenden Paragraphen soll nun ein Weg skizziert werden, wie sich das Intentionale aus dem Begriff der Unterscheidbarkeit tilgen liesse.

Unterscheidbarkeit und Homomorphismen

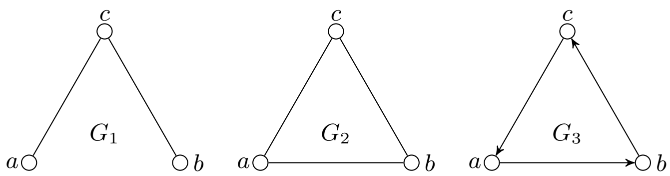
§ 27 Häufig lassen sich die Gegenstände alltäglicher Erfahrung auf mannigfache Weise unterscheiden: Manche leuchten an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Farben; andere variieren in Grösse und Gewicht zugleich; wiederum andere scheiden sich nicht allein daran, dass sie diesem oder jenem gehören, sondern vielleicht auch an ihrer Heftigkeit. Je nach Zweck und Gebrauch wird mitunter der einen Unterscheidungsweise stärkere Beachtung zuteil als der anderen. Geht es jedoch darum, die Gegenstände zu zählen, ist Frege wohl Recht zu geben, wo er schreibt: «Die Eigenschaften, durch die sich die Dinge unterscheiden, sind für ihre Anzahl etwas Gleichgiltiges und Fremdes.»[124] Da wir nach dem schwächsten Unterscheidbarkeitsgrad suchen, der für das Zählen gerade noch hinreicht – wofür zunächst die zwei schwächeren Grade in Betracht kommen –, können wir ausserdem von den Eigenschaften der Dinge absehen und an den Relationen zwischen ihnen festhalten, ohne indes dem je eigenen Charakter dieser Relationen, sondern allein ihrem Bestehen Rechnung zu tragen. Es bietet sich daher die Betrachtung einer Sprache (erster Stufe) an, deren Signatur keine einstelligen Prädikate und nur ein einziges zweistelliges Relationszeichen ‚A' enthält; nennen wir sie $\mathcal{L}_G$.

Liesse sich die offene Aussage ‚Axx' von manchen Elementen eines Gegenstandsbereichs zu $\mathcal{L}_G$ erfüllen und von manchen anderen nicht, läge bereits jene Art der starken Unterscheidbarkeit vor, die durch das Absehen von einstelligen Prädikaten herausgehalten werden sollte; liesse sich dieselbe Aussage hingegen von allen Elementen des Bereichs erfüllen – wie dies bei ‚$x = x$' für gewöhnlich der Fall ist –, unterschiede sie nur jene Gegenstände voneinander schwach, die ‚Axy' irreflexiv nicht erfüllten, d. i. zueinander nicht in der bezeichneten Relation stünden. In letzterem Fall wäre es wohl günstiger, ‚$\sim Axy$' als Bezeichnung der eigentlichen Grundrelation anzusehen. Es ist daher naheliegend, nur solche Interpretationen von $\mathcal{L}_G$ zu betrachten, die auch Modelle von ‚$\forall x \sim Axx$' sind. Da zudem, falls $\mathcal{L}_G$ das Zeichen der Identität bereithielte (und dieses wie gewöhnlich als die kleinste reflexive Relation auf dem Gegenstandsbereich interpretiert würde), jeder

[124] *GA*, § 34.

Gegenstand von jedem anderen (durch ‚$x=x \mathbin{\boldsymbol{.}} x\neq y$‘) schwach unterscheidbar wäre, ist ‚$=$‘ aus der Liste der logischen Zeichen zu streichen. Um dennoch die ganze Aussagekraft der ersten Stufe zu erhalten, steht es uns frei, die Individuenvariablen im Sinne Wittgensteins zu lesen (siehe § 21). Auch sollten Individuenkonstanten, wo es doch unser Anliegen ist, beim Zugriff auf die Gegenstände keine Spuren zu hinterlassen, vermieden werden, zumal ihr Auftreten an Argumentstellen offener Aussagen stärkere Unterscheidbarkeit implizieren kann.[125]

Die Systeme, welche aus der Interpretation von $\mathcal{L}_G$ hervorgehen, bilden den Untersuchungsgegenstand der Graphentheorie. Graphen, deren Grundrelation irreflexiv ist, die also den Satz ‚$\forall x \sim Axx$‘ erfüllen, werden mitunter auch einfache genannt, um sie von solchen, die Schlingen aufweisen, abzuheben. In ihrer diagrammatischen Darstellung, für Nicht-Mathematiker gewiss die anschaulichste, sind die verschiedenen Elemente aus dem jeweiligen Gegenstandsbereich durch räumlich getrennte Knoten und das Bestehen oder Nicht-Bestehen der von ‚A‘ bezeichneten Relation zwischen ihnen durch eine verbindende Kante oder das Fehlen einer solchen dargestellt; wie etwa in diesen drei simplen Beispielen:



Offensichtlich unterscheidet sich der dritte Graph von den beiden ersten durch die Gerichtetheit seiner Grundrelation; Mathematiker unterscheiden hier gerichtete von ungerichteten Graphen. Um die Ungerichtetheit als formalen Zug einer Relation zu bewahren und von dem Merkmal der Symmetrie abzugrenzen (siehe § 10), ist es angebracht, zur Beschreibung gerichteter Graphen eine Sprache $\mathcal{L}_{\vec{G}}$ einzuführen, die anstelle von ‚A‘ ein Relationszeichen ‚$\vec{A}$‘ mit geordneten Argumentstellen enthält, ansonsten aber mit $\mathcal{L}_G$ übereinstimmt.[126] Die Grundrelation ungerichteter Graphen lässt sich anschaulich als Nachbarschafts-, jene gerichteter Graphen als Vorgängerrelation deuten.

[125] Eine ähnliche Sprache (wenngleich mit ‚$=$‘) wird in Ebbinghaus u. a. (2007, S. 49) vorgestellt.

[126] Es stellt sich die freilich berechtigte Frage, weshalb die Irreflexivität der Grundrelation, sowohl bei gerichteten als auch ungerichteten Graphen, nicht ebenfalls als formaler Zug behandelt wird. Hier wird dies aus rein technischen Gründen unterlassen. Quines Definition der schwachen Unterscheidbarkeit bedürfte umständlicher Anpassung, zumal (gerade im Hinblick auf zusammengesetzte Aussagen) zwei Arten der Irreflexivität, eine logische und eine materiale, auseinandergehalten werden müssten. Aus der Besetzung der Argumentstellen von ‚A‘ oder ‚$\vec{A}$‘ durch Vorkommen derselben Variablen gingen nämlich keine falschen, sondern überhaupt keine Sätze hervor, wohingegen z. B. ‚$\exists z(\vec{A}xz \mathbin{\boldsymbol{.}} \vec{A}zx)$‘ durchaus wohlgeformt wäre.

Weiterhin gilt es festzuhalten, dass die Buchstaben ‚a', ‚b' und ‚c' nichts darstellen. Ihr Gebrauch verrät aber die eingenommene Betrachtungsweise; gleichsam „von oben" herab werden die Knoten[127] des Graphen beschriftet, ohne indessen an der Sache selbst Spuren zu hinterlassen. Denn je für sich betrachtet und ohne auf die Buchstaben zu achten, sind die Knoten – wie die Raumpunkte in Freges Beispiel (siehe § 24) – einander gleich; und selbst im Zusammenhang betrachtet erscheinen manche weitgehend gleich. Oder ergibt die Frage, auf *welchen* Knoten von G_2 der Buchstabe ‚a' zeige, etwa Sinn? Es liesse sich doch nicht anders darauf antworten, als zu sagen, er zeige auf einen darunter – obgleich der beschriftende Betrachter in seiner vermeintlichen Allwissenheit so tut, als könne ein *bestimmter* Knoten herausgegriffen werden. Als einziger in den gegebenen Beispielen kann der Knoten c des ersten Graphen aufgrund eines strukturellen Merkmals aus den anderen herausgehoben werden; denn im Gegensatz zu seinen Mitknoten besitzt er zwei Nachbarn, was sich in $\mathcal{L}_G$ durch ‚$\exists y, z(Axy \mathbin{.} Axz)$' ausdrücken lässt – sofern natürlich die gebundenen Variablen im Sinne Wittgensteins gelesen werden. Und dennoch muss zugegeben werden, dass sich in $\mathcal{L}_G$ selbst die Knoten von G_2 durch die Aussage ‚Axy' allesamt schwach voneinander unterscheiden lassen.

Wenn, wie Frege meint, «[i]n der allgemeinen Ersetzbarkeit [...] nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten»[128] sind, erstaunt es nicht, dass auch im Hinblick auf die gegebenen Beispiele manche Vertauschbarkeit festgestellt werden kann. So können im mittleren Graphen die Knoten beliebig miteinander vertauscht werden, ohne dass dadurch einem davon ein Merkmal, das er zuvor nicht besass, zu- oder eines, das er besass, abhanden käme. Auch die Knoten des gerichteten Graphen erlauben gewisse Vertauschungen – oder vielleicht präziser: Verschiebungen –, nur dürfen diese, bildlich gesprochen, nicht gegen die Laufrichtung der Grundrelation erfolgen: Wird a anstelle von b gesetzt, muss b die Stelle von c einnehmen, wodurch wiederum c in die zuerst vakant gewordene Stelle gedrängt wird; denn würden nur a und b miteinander vertauscht, stünden sie plötzlich in umgekehrter Richtung zueinander. Desgleichen würde der Knoten c im ersten Graphen – ungeachtet weiterer Verschiebungen – das ihn auszeichnende Merkmal verlieren, wenn er an die Stelle eines anderen gerückt würde. Vertauschungen, welche die Nachbarschaftsverhältnisse (oder ihr gerichtetes Pendant) zwischen den Knoten – und damit ihre strukturellen Merkmale – unverändert belassen, fallen unter den allgemei-

[127] Die Bedeutung des Wortes schwankt hier (und nicht selten auch in Werken zur Graphentheorie) zwischen den kreisrunden Bestandteilen der diagrammatischen Darstellung eines Graphen und den durch sie dargestellten Gegenständen; Analoges gilt für das Wort ‚Graph'. In welcher Bedeutung ihre Vorkommen genommen werden dürfen, ist dem Zusammenhang zu entnehmen.

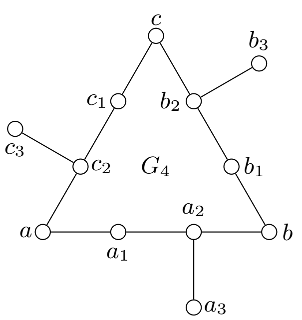
[128] Siehe Anm. 109.

nen Automorphismusbegriff.[129] An der Existenz von Automorphismen bestimmter Art lassen sich denn auch die Grade der Unterscheidbarkeit – oder besser gesagt: der Ununterscheidbarkeit – einfangen, für die bis anhin nur Quines sprachrelative Begrifflichkeit zur Verfügung stand: Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann

> nicht stark unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$;
> nicht moderat unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$ und $\pi(b) = a$;
> nicht schwach unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$, $\pi(b) = a$ und $\pi(x) = x$ für alle anderen Knoten, sowie $\{a, b\}$ keine Kante von G ist.[130]

Aus der Definition der Spezifizierbarkeit nach Quine und dem ersten der obigen Sätze folgt sofort, dass ein Knoten a von G in $\mathcal{L}_G$ genau dann spezifizierbar ist, wenn ihn alle Automorphismen von G fest belassen – was freilich insbesondere dann eintrifft, wenn G asymmetrisch ist, d. h. nebst der Identitätsabbildung keine weiteren Automorphismen aufweist.[131]

Wie aus den gegebenen Beispielen unschwer zu erkennen ist, lässt sich die Existenz zumindest mancher Automorphismen eines Graphen an dem Bestehen entsprechender geometrischer Symmetrien in (manchen) seiner diagrammatischen Darstellung(en) ersehen; mitunter kann dies dazu genutzt werden, den Grad an Unterscheidbarkeit zwischen Knoten auch im Hinblick auf komplexere Graphen schnell und anschaulich zu bestimmen:



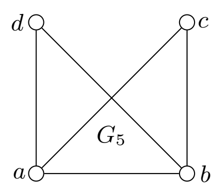
[129] Eine spezifische Definition für ungerichtete Graphen wird im Anhang gegeben, wo auch die folgenden Sätze bewiesen werden.

[130] Um den letzten Satz auf gerichtete Graphen anwenden zu können, müsste lediglich die zweite Bedingung dahingehend angepasst werden, dass weder $\langle a, b\rangle$ noch $\langle b, a\rangle$ Kanten von $\vec{G}$ seien. Im Anhang werden die Sätze für einfache, ungerichtete Graphen bewiesen; dies auch für gerichtete zu tun, würde indes keine neuen Schwierigkeiten bereiten. Für ihre Ausweitung auf allgemeine Strukturen, vgl. Ketland (2011).

[131] Bemerkenswerterweise sind unter den ungerichteten, einfachen Graphen mit weniger als sechs Knoten keine asymmetrischen (vgl. dazu Erdős und Rényi (1963)).

Offensichtlich bestehen hier Drehsymmetrien um den Schwerpunkt des Dreiecks herum; die Drehung um 120° gegen den Uhrzeigersinn etwa bildet das Dreieck deckungsgleich, wie wir in der Schule sagten, auf sich selbst ab; nach der Drehung kommt die Ecke a anstelle der Ecke b, b anstelle von c und c anstelle von a zu liegen (desgleichen a_i anstelle von b_i, b_i anstelle von c_i und c_i anstelle von a_i für $i = 1, 2, 3$). Bei der entsprechenden Permutation der Knoten von G_4 handelt es sich, was leicht nachzuprüfen wäre, denn auch um einen Automorphismus; aus der Art, wie die Eckknoten a, b und c miteinander vertauscht werden können, lässt sich wiederum ableiten, dass sie paarweise nicht stark unterscheidbar sind. Dagegen wäre keine Permutation, die a anstelle von b und b anstelle von a rückte, ein Automorphismus, wie sich zwar mit ein bisschen mehr Aufwand als zuvor, jedoch ebenfalls unschwer nachprüfen liesse; da Gleiches auch für c in Bezug auf die beiden anderen Knoten gilt, folgt daraus, dass die drei Eckknoten paarweise moderat unterscheidbar sind und somit, aufgrund des ersten Befundes, *bloss* moderate Unterscheidbarkeit zwischen ihnen herrscht.

Im Gegensatz dazu ist die paarweise Vertauschung der Knoten a und b von G_2 ein Automorphismus, woraus nach dem zweiten der obigen Sätze folgt, dass zwischen ihnen keine moderate Unterscheidbarkeit herrscht. Obgleich der Automorphismus den dritten Knoten zwangsläufig fest belässt, erfüllen a und b die Bedingungen an das Fehlen jeglicher Unterscheidbarkeit dennoch nicht; schwach unterscheidbar sind sie indessen nur deshalb, weil sie durch eine Kante verbunden sind. Dies könnte nun den Anschein erwecken, als seien sie in struktureller Hinsicht überhaupt nicht auseinanderzuhalten; bedenkt man aber den Umstand, dass zwei benachbarte Knoten eines einfachen Graphen schon deshalb nicht all dieselben Nachbarn haben können, weil der eine den andern, jener aber nicht sich selbst zum Nachbarn hat, kommt einstweilen doch ein strukturelles Kennzeichen zum Vorschein, d. i. die Beziehung, nicht dieselben Nachbarn zu haben. Umgekehrt lassen sich zwei Knoten mit derselben Nachbarschaft, d. s. genau jene, welche die reflexive Aussage ‚$\forall z(Axz \equiv Ayz)$' auch irreflexiv erfüllen, nicht einmal schwach voneinander unterscheiden, was auf die Knoten a und b in G_1 desgleichen wie auf die Knoten c und d in dem folgenden Graphen zutrifft:



Das Verhältnis zweier Knoten mit derselben Nachbarschaft ist zu den übrigen Komponenten des Graphen gerade aufgrund der nachbarschaftlichen Übereinstimmung allseits genau das gleiche; sie unterscheiden sich daher strukturell in keiner Hinsicht.

Von hier aus wird indes ersichtlich, wie sich fehlende Unterscheidbarkeit verschiedener Knoten doch noch an der Existenz eines Homomorphismus bestimmter Art festmachen lässt. Denn die Abbildung, welche die Knoten a und b von G_5 auf die Knoten a und b von G_2 sowie c und d zusammen auf c abbildet, erhält die Struktur des Ausgangsgraphen insofern, als die Kanten des Zielgraphen genau jene Knoten verbinden, deren Urbilder in dem Ausgangsgraphen ebenfalls verbunden sind. Es lässt sich nun unschwer beweisen, dass für jedes irreflexive Paar ununterscheidbarer Knoten eine surjektive und in dem eben spezifizierten Sinne strukturerhaltende Abbildung auf einen anderen Graphen existiert, und dass umgekehrt zwei Knoten, für die, wie man sagen könnte, eine homomorphe Reduktion existiert, nicht schwach unterscheidbar sind.[132]

§ 28 Recht besehen lässt sich der Automorphismusbegriff allein aus der angedeuteten Betrachtungsweise, gleichsam „von oben", sinnvoll auf Graphen anwenden; denn die Anwendung einer automorphen Operation auf einen Graphen verändert an ihm nichts; es ändert lediglich die Beschriftung der Knoten. (Mit Wittgenstein liesse sich vielleicht sagen, Automorphismen auf Graphen seien überhaupt keine Operationen, da sie keinen Unterschied der Formen zum Ausdruck brächten.[133]) Es wird so getan, als behielten die Knoten über die vermeintliche Vertauschung hinweg eine ihnen je eigene Identität bei, wo doch strukturelle Spezifizierbarkeit nur in asymmetrischen Systemen allen Gliedern zukommt. Anders verhält sich in dieser Hinsicht das zuletzt angegebene Kennzeichen für das Fehlen von Unterscheidbarkeit, zumal es ein Verhältnis anzeigt, das, losgelöst von unseren Beschriftungen und hypothetischen Annahmen, zwischen strukturverwandten Systemen besteht. Die Eigenart der Verwandtschaft zwischen einem Graphen und seiner homomorphen Reduktion – die eben gerade keine strukturelle Gleichheit[134] ist – weist dies Kennzeichen letztlich als die mathematische Fassung jener Intuition aus, der wir sowohl bei Frege wie auch in der Legende aus Nicäa begegnet sind, wonach ununterscheidbare Gegenstände zu einem, in sich verschränkten und nach aussen hin nunmehr als Einheit erscheinenden Ding verschmelzen.

[132] Ein Beweis findet sich ebenso wie die präzisere Definition eines Begriffs der homomorphen Reduktion im Anhang.

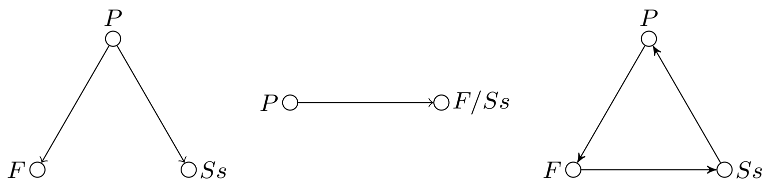
[133] Vgl. *LPA*, 5.24 f.

[134] Da es sich bei Reduktionen nie um Isomorphismen handelt, sind Ausgangs- und Zielsysteme nicht elementar äquivalent, was sich in dem angeführten Beispiel u. a. daran ersehen lässt, dass G_2 im Gegensatz zu G_5, wo die Kante zwischen c und d fehlt, die globale Eigenschaft der Vollständigkeit besitzt.

Am klarsten scheint mir Thomas von Aquin den Zusammenhang von Zählbarkeit und homomorpher Reduktion erkannt zu haben; jedenfalls wusste er ihn bei der Verteidigung seiner Trinitätslehre gegen die – sich auf die (der Legende nach unzählbaren) nicänischen Kirchenväter berufenden – Griechen zweckdienlich zu nutzen:[135]

> Respondeo dicendum quod necesse est dicere Spiritum sanctum a Filio esse. Si enim non esset ab eo, nullo modo posset ab eo personaliter distingui. Quod ex supra dictis patet. Non enim est possibile dicere quod secundum aliquid absolutum divinae personae ab invicem distinguantur; quia sequeretur quod non esset trium una essentia. Quidquid enim in divinis absolute dicitur ad unitatem essentiae pertinet. Relinquitur ergo quod solum relationibus divinae personae ab invicem distinguantur. Relationes autem personas distinguere non possunt, nisi secundum quod sunt oppositae. Quod ex hoc patet quia Pater habet duas relationes, quarum una refertur ad Filium, et alia ad Spiritum sanctum: quae tamen, quia non sunt oppositae, non constituunt duas personas, sed ad unam tantum personam Patris pertinent. Si autem in Filio et Spiritu sancto non esset invenire nisi duas relationes, quibus uterque refertur ad Patrem, illae relationes non essent ad invicem oppositae; sicut neque duae relationes, quibus Pater refertur ad illos. Unde, sicut persona Patris est una; ita sequeretur quod persona Filii et Spiritus sancti esset una, habens duas relationes oppositas duabus relationibus Patris. Hoc autem est haereticum, cum tollat fidem Trinitatis. Oportet ergo quod Filius et Spiritus sanctus ad invicem referantur oppositis relationibus. Non autem possunt esse in divinis aliae relationes oppositae, nisi relationes originis, ut supra probatum est. Oppositae autem relationes originis accipiuntur secundum principium, et secundum quod est a principio. Relinquitur ergo quod necesse est dicere, vel Filium esse a Spiritu sancto, quod nullus dicit, vel Spiritum sanctum esse a Filio, quod nos confitemur. Et huic quidem consonat ratio processionis utriusque.

Sehen wir von der aristotelischen Doktrin, wonach Relationen stets im Paar mit ihrer Umkehrung auftreten, ab, um nur auf die Relation ‚a x procedit y' zu achten, erweist sich die Erkenntnis, dass im Hinblick auf die drei Graphen



eine homomorphe Reduktion von dem linken, nicht aber von dem rechten, auf den mittleren existiert, als das Element, worauf im Grunde das Herzstück seiner Argumentation ruht.

[135] *Summa Theologica* I, q. xxxvi, a. ii.

Anhang

Die folgenden Definitionen und Sätze handeln nur von einfachen, ungerichteten Graphen. Die Knotenmenge eines Graphen G wird mit ‚$V(G)$', seine Kantenmenge mit ‚$E(G)$' und die Anzahl einer Menge M mit ‚$|M|$' bezeichnet.

Definition 1. Eine Bijektion $\alpha : V(G) \to V(G)$ ist ein Automorphismus von G, falls jedes Knotenpaar $\{x, y\}$ genau dann in $E(G)$ ist, wenn auch $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ in $E(G)$ ist.

Definition 2. Seien G und G^* zwei Graphen mit $|V(G^*)| = |V(G) - 1|$. Eine surjektive Abbildung $\rho : V(G) \to V(G^*)$ ist eine homomorphe Reduktion von G auf G^*, falls jedes Knotenpaar $\{x, y\}$ genau dann in $E(G)$ ist, wenn $\{\rho(x), \rho(y)\}$ in $E(G^*)$ ist.

Satz 1. Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann nicht stark unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$.

Beweis.

$\Leftarrow$ Seien u, v zwei Knoten eines Graphen G, für die ein Automorphismus $\alpha : V(G) \to V(G)$ mit $\alpha(u) = v$ existiert. Da jeder Automorphismus ein Isomorphismus ist, folgt aus dem wohlbekannten Isomorphielemma[136] für jede Aussage ‚φ' in $\mathcal{L}_G$: $G \vDash \varphi[u]$ gdw. $G \vDash \varphi[\alpha(u)]$, d. i. $G \vDash \varphi[v]$. Somit sind u und v in $\mathcal{L}_G$ nicht stark unterscheidbar.

$\Rightarrow$ Da nur endliche Graphen betrachtet werden, ist die Knotenmenge stets von der Form $V(G) := \{v_1, ..., v_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Definiere für jeden Knoten die Indexmengen $I_{v_k} := \{j \in \mathbb{N} \mid j > k \;\&\; \{v_k, v_j\} \in E(G)\}$ und $\bar{I}_{v_k} := \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq k \;\&\; \{v_k, v_j\} \notin E(G)\}$. Darauf aufbauend kann nun in $\mathcal{L}_G^{=}$[137] eine Aussage ‚ψ' formuliert werden, welche die Struktur von G vollständig beschreibt; definiere hierzu

$$\psi := \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j_i \in I_{v_i}} Ax_i x_{j_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j_i \in \bar{I}_{v_i}} {\sim} Ax_i x_{j_i} \right).$$[138]

Offensichtlich gilt $G \vDash \psi[v_1, ..., v_n]$. Entsprechend lässt sich für jedes v_i eine Aussage in einer freien Variablen definieren, die alle (auf der ersten Stufe formulierbaren) strukturellen Merkmale von v_i umfasst:

$$\psi_{v_i} := \exists x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \; \psi.$$

Offensichtlich gilt $G \vDash \psi_{v_i}[v_i]$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

---

[136] Vgl. Ebbinghaus u. a. (2007, S. 42 f).

[137] Hier wie auch beim zweiten Satz erfolgen die Beweise gewohnheitshalber in der Sprache $\mathcal{L}_G^{=}$, die durch Hinzunahme des Identitätszeichens in seiner üblichen Interpretation aus $\mathcal{L}_G$ hervorgeht. Die beiden Beweise liessen sich indes problemlos und ganz ähnlich auch in Bezug auf $\mathcal{L}_G$ bei Wittgensteinscher Lesart der gebundenen Variablen führen.

[138] Anstelle von ‚$\wedge$' wurde im zweiten Abschnitt der Arbeit das platzsparende ‚**.**' als Zeichen der Konjunktion verwendet.

Seien nun u, v zwei in $\mathcal{L}_G^{\equiv}$ nicht stark unterscheidbare Knoten eines Graphen G der Ordnung n. Dann gibt es in $\mathcal{L}_G^{\equiv}$ keine offene Aussage in einer freien Variablen, die von u erfüllt würde, von v aber nicht. Insbesondere gilt also $G \vDash \psi_u[v]$.

Da $u, v \in V(G)$ gibt es zwei Indizes $k, l \in \{1, ..., n\}$, sodass $u = v_k$ und $v = v_l$. Aus $G \vDash \psi[v_1, ..., v_n]$ folgt, dass ‚ψ' von jeder Variablenbelegung β mit $\beta(x_i) = v_i$, für jedes $i \in \{1, ..., n\}$, wahr gemacht wird.[139] Aus $G \vDash \psi_{v_k}[v_l]$ wiederum folgt, dass es eine Belegung γ mit $\gamma(x_k) = v_l$ gibt, die ‚ψ' wahr macht. Es kann nun ein Automorphismus $\sigma : V(G) \to V(G)$ mit $\sigma(u) = v$ konstruiert werden; definiere hierzu

$$\sigma := \gamma \circ \beta^{-1}.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, dass σ die ihm zugeschriebenen Eigenschaften besitzt.

Damit eine Belegung ‚ψ' wahr machen kann, muss sie bezüglich der Variablenmenge $\{x_1, ..., x_n\}$ bijektiv sein; andernfalls könnte sie $\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j$ nicht erfüllen. Also ist σ offensichtlich bijektiv. Ebenso offensichtlich gilt

$$\sigma(v_k) = \gamma \circ \beta^{-1}(v_k) = \gamma(x_k) = v_l.$$

Bliebe noch die Homomorphie zu zeigen. Sei $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, wobei oBdA angenommen wird, dass $i < j$. Aus der Konstruktion der Aussage ‚ψ' ist klar, dass ‚Ax_ix_j' als ein Glied der Konjunktion in ihr enthalten ist. Da ‚ψ' von γ wahr gemacht wird, gilt insbesondere $G \vDash A[\gamma(x_i), \gamma(x_j)]$. Nun ist aber $\gamma(x_{i,j}) = \sigma(v_{i,j})$. Also auch $G \vDash A[\sigma(v_i), \sigma(v_j)]$, woraus schliesslich folgt, dass $\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\} \in E(G)$.

Seien $v_i, v_j \in V(G)$. Da σ Element der symmetrischen Gruppe S_n ist, gibt es zwei natürliche Zahlen m_i, m_j, sodass $\sigma^{m_{i,j}}(v_{i,j}) = v_{i,j}$. Für $m := kgV(m_i, m_j)$ gilt insbesondere $\sigma^m(v_{i,j}) = v_{i,j}$. Wenn nun $\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\} \in E(G)$, dann auch $\{\sigma^m(v_i), \sigma^m(v_j)\} \in E(G)$.

□

Satz 2. Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann nicht moderat unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$ und $\pi(b) = a$.

Beweis.

$\Leftarrow$ Seien u, v zwei Knoten eines Graphen G, für die ein Automorphismus $\alpha : V(G) \to V(G)$ mit $\alpha(u) = v$ und $\alpha(v) = u$ existiert. Wiederum aus dem Isomorphielemma folgt für jede Aussage ‚φ' in $\mathcal{L}_G$: $G \vDash \varphi[u, v]$ gdw. $G \vDash \varphi[\alpha(u), \alpha(v)]$, d. i. $G \vDash \varphi[v, u]$. Somit sind u und v in $\mathcal{L}_G$ nicht moderat unterscheidbar.

$\Rightarrow$ Es sei ‚ψ' definiert wie zuvor; definiere nun zudem für $1 \leq i < j \leq n$

$$\psi_{v_i,v_j} := \exists x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n \ \psi.$$

Offensichtlich gilt $G \vDash \psi_{v_i,v_j}[v_i, v_j]$ für alle $i < j \in \{1, ..., n\}$.

[139] Welchen Werteverlauf β für Variablen x_m mit $m > n$ annimmt, ist hier irrelevant, weshalb ohne Bedenken von *der* Belegung β gesprochen werden kann.

Seien u, v zwei in $\mathcal{L}_G^{\equiv}$ nicht moderat unterscheidbare Knoten eines Graphen G der Ordnung n. Dann gibt es in $\mathcal{L}_G^{\equiv}$ keine offene Aussage in zwei freien Variablen, die von $\langle u, v\rangle$ erfüllt würde, von $\langle v, u\rangle$ aber nicht. Insbesondere gilt also $G \vDash \psi_{u,v}[v, u]$.

Wiederum gibt es zwei Indizes $k, l \in \{1, ..., n\}$, sodass $u = v_k$ und $v = v_l$, wobei oBdA angenommen wird, dass $k < l$. Es existiert eine Variablenbelegung β mit denselben Eigenschaften wie zuvor und aus $G \vDash \psi_{v_k,v_l}[v_l, v_k]$ folgt diesmal, dass es eine Belegung γ mit $\gamma(x_k) = v_l$ und $\gamma(x_l) = v_k$ gibt, die ‚ψ' wahr macht. Die Abbildung $\sigma := \gamma \circ \beta^{-1}$ ist, wie sich analog zu vorhin nachweisen liesse, wiederum ein Automorphismus von G, diesmal mit $\sigma(u) = v$ und $\sigma(v) = u$.

□

Satz 3. Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann nicht schwach unterscheidbar, wenn ein Automorphismus π von G existiert, sodass $\pi(a) = b$, $\pi(b) = a$ und $\pi(x) = x$ für alle anderen Knoten, sowie $\{a, b\}$ nicht in $E(G)$ ist.

Beweis. Zuerst wird ein Lemma bewiesen, das sich für den anschliessenden Beweis des Satzes als nützlich erweisen wird.

Lemma. Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann nicht schwach unterscheidbar, wenn sie die Aussage ‚$\forall z(Axz \equiv Ayz)$' irreflexiv erfüllen.

Beweis. Definiere $\varphi := \forall z(Axz \equiv Ayz)$.

$\Rightarrow$ Wenn $G \nvDash \varphi[a, b]$, dann $G \vDash {\sim}\varphi[a, b]$. Da ‚${\sim}\varphi$' irreflexiv ist, gilt, dass wenn ‚φ' nicht von $\{a, b\}$ erfüllt wird, a und b in $\mathcal{L}_G$ schwach unterscheidbar sind.

$\Leftarrow$ Die Definition eines neuen Zeichens ‚=' in $\mathcal{L}_G$ durch ‚φ', d. i. $x{=}y := \varphi xy$, entspricht dem, was Quine die Definition der Identität «by exhaustion of atomic contexts» nennt(; man beachte, dass die Argumentstellen von ‚A' ungeordnet sind). Dem so definierten Relationszeichen kommen die üblichen Eigenschaften der Identität zu, insbesondere die Substitutivität.[140] Wenn also $G \vDash \varphi[a, b]$, dann gilt für jede Aussage ‚χ' in $\mathcal{L}_G$ und in zwei freien Variablen: $G \vDash \chi[a, b] \supset \chi[a, a]$, d. h. a und b sind nicht schwach unterscheidbar.

□

$\Leftarrow$ Es sei π der Automorphismus von G mit den vorgegebenen Eigenschaften in Bezug auf zwei nicht benachbarte Knoten u, v von G. Offensichtlich gilt für einen beliebigen dritten Knoten w von G: $\{u, w\} \in E(G)$ gdw. $\{\pi(u), \pi(w)\} \in E(G)$, d. i. $\{v, w\} \in E(G)$. Also erfüllt $\{u, v\}$ die Aussage ‚$\forall z(Axz \equiv Ayz)$', woraus nach dem Lemma folgt, dass u und v in $\mathcal{L}_G$ nicht schwach unterscheidbar sind.

[140] Vgl. Quine (1969b, S. 13 f), von wo auch die zitierte Stelle stammt. Quine beweist dies (in groben Zügen) für den Fall einer Sprache, deren Signatur nur ein einziges zweistelliges Prädikat enthält.

$\Rightarrow$ Seien u, v zwei in $\mathcal{L}_G$ nicht schwach unterscheidbare Knoten eines Graphen G und die Abbildung $\alpha : V(G) \to V(G)$ wie folgt definiert:

$$\alpha(x) := \begin{cases} u & \text{falls } x = v; \\ v & \text{falls } x = u; \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Lemma folgt, dass $\{u, v\}$ die Aussage ‚$\forall z(Axz \equiv Ayz)$' erfüllt, d. h. u, v teilen sich dieselbe Nachbarschaft. Insbesondere sind u, v, da G einfach ist, nicht benachbart.

Offensichtlich handelt es sich bei der Abbildung α um eine Bijektion auf $V(G)$. Sei $\{c, d\} \in E(G)$. Für den Fall, dass $c, d \in V(G) \setminus \{u, v\}$, ist $\{\alpha(c), \alpha(d)\} = \{c, d\}$; für den Fall, dass oBdA $c = u$ und $d \in V(G) \setminus \{u, v\}$, ist $\{\alpha(c), \alpha(d)\} = \{v, d\}$ und, da u und v alle Nachbarn gemeinsam haben, eine Kante von G.

Seien $c, d \in V(G)$ mit $\{\alpha(c), \alpha(d)\} \in E(G)$. Es ist klar, dass $\{c, d\} \neq \{u, v\}$, und dass $\{c, d\} \in E(G)$, falls $c, d \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Es sei also oBdA $c = u$ und $d \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Da aber $\{v, d\} \in E(G)$ ist auch $\{u, d\} \in E(G)$. Bei der Abbildung α handelt es sich also um einen Automorphismus von G.

$\square$

Satz 4. Zwei Knoten a und b eines Graphen G sind in $\mathcal{L}_G$ genau dann nicht schwach unterscheidbar, wenn ein Graph G^* mit $|V(G^*)| = |V(G) - 1|$ und eine homomorphe Reduktion ρ von G auf G^* existieren, sodass $\rho(a) = \rho(b)$.

Beweis.

$\Leftarrow$ Es sei ρ eine homomorphe Abbildung von G auf G^* mit den vorgegebenen Eigenschaften in Bezug auf zwei Knoten u, v von G. Wäre $\{u, v\} \in E(G)$, wäre $\{\rho(u), \rho(v)\}$ und mit ihr auch $\{\rho(u), \rho(u)\}$ eine Kante von G^*. Aufgrund der Homomorphie von ρ wäre dann aber $\{u, u\} \in E(G)$, was der Einfachheit von G widerspräche. Also sind u und v in G nicht benachbart.

Definiere die Abbildung $\alpha : V(G) \to V(G)$ wie im vorangegangenen Beweis und sei $\{c, d\} \in E(G)$. Der Nachweis der Homomorphie von α ist oBdA allein für den Fall, dass $c = u$ und $d \in V(G) \setminus \{u, v\}$, zu führen. Aus der Homomorphie von ρ folgt, dass $\{\rho(u), \rho(d)\}$ und, da $\rho(u) = \rho(v)$, also $\{\rho(v), \rho(d)\}$ eine Kante von G^* ist. Wiederum aus der Homomorphie von ρ folgt, dass $\{v, d\}$ und also $\{\alpha(u), \alpha(d)\}$ eine Kante von G ist. Der zweite Teil des Nachweises folgt dem ersten in umgekehrter Richtung. Bei der Abbildung α handelt es sich also um einen Automorphismus von G. Aus dem vorangegangenen Satz folgt nun, dass u und v in $\mathcal{L}_G$ nicht schwach unterscheidbar sind.

$\Rightarrow$ Seien u, v zwei in $\mathcal{L}_G$ nicht schwach unterscheidbare – und damit nicht benachbarte – Knoten eines Graphen G. Definiere die Knotenmenge des Graphen G^* durch $V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$ für ein beliebiges w, das nicht in $V(G) \setminus \{u, v\}$ ist. Offensichtlich gilt $|V(G^*)| = |V(G) - 1|$. Definiere weiter $E(G^*)$ durch

$$(E(G) \setminus \{\{x, y\} \in E(G) \mid x = u \vee x = v\}) \;\cup\; \{\{w, x\} \mid \{u, x\} \in E(G) \vee \{v, x\} \in E(G)\}.$$

Definiere $\rho : V(G) \to V(G^*)$ wie folgt:

$$\rho(x) := \begin{cases} w & \text{falls } x = u; \\ w & \text{falls } x = v; \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung ρ ist offensichtlich surjektiv; dass sie auch homomorph ist, kann der Definition von $E(G^*)$ unschwer entnommen werden.

$\square$

Literatur

Aikhenvald, A. Y.

2006 „Classifiers and noun classes: Semantics“, in: *Encyclopedia of Languages and Linguistics*, hrsg. von Keith Brown, Elsevier, Oxford, S. 463–71.

Alston, William und Jonathan Bennett

1984 „Identity and cardinality: Geach and Frege“, *The Philosophical Review* (93, 4), S. 553–67.

Behmann, Heinrich

1922 „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem“, *Mathematische Annalen* (86, 3/4), S. 163–229.

Bondy, J. A. und U. S. R. Murty

2008 *Graph Theory*, Springer, New York.

Bowern, Claire und Jason Zentz

2012 „Diversity in the numeral systems of Australian languages“, *Anthropological Linguistics* (54, 2), S. 133–60.

Büchi, Romain

2011 „Schrift und Notation“, *Germanistik in der Schweiz* (8), S. 85–136.

Bussmann, Hadumod

2008 *Lexikon der Sprachwissenschaft*, 4. Aufl., Kröner, Stuttgart.

Dipert, Randall

1982 „Set-theoretical representations of ordered pairs and their adequacy for the logic of relations“, *Canadian Journal of Philosophy* (12, 2), S. 353–74.

Doetjes, Jenny

2012 „Count/mass distinctions across languages“, in: *Semantics*, hrsg. von Claudia Maienborn, Klaus von Heusinger und Paul Portner, HSK 33/3, De Gruyter, Berlin, S. 2559–80.

Doutté, Edmond

1909 *Magie et religion dans l'Afrique du Nord*, Jourdan, Alger.

Dudenredaktion

2009 Hrsg., *Duden. Die Grammatik*, 8. Aufl., Dudenverlag, Mannheim.

Dummett, Michael

1981 *Frege. Philosophy of Language*, 2. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas

2007 *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Berlin.

Erdős, Paul und Alfréd Rényi

1963 „Asymmetric graphs“, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (14, 3/4), S. 295–315.

Fine, Kit

2000 „Neutral relations“, *The Philosophical Review* (109, 1), S. 1–33.

Frazer, James George

1918 *Folk-lore in the Old Testament*, Bd. 2, Macmillan, London.

Frege, Gottlob

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Meiner, Hamburg, 1988.
(zitiert: *GA*)

1892 „Über Sinn und Bedeutung“, in: *Kleine Schriften*, hrsg. von Ignacio Angelelli, Olms, Hildesheim, 1990, S. 143–62.
(zitiert: *SB*)

1893 *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1, Hermann Pohle, Jena.
(zitiert: *GG 1*)

1894 „Rezension von: E. G. Husserl, Philosophie der Arithmetik“, in: *Kleine Schriften*, hrsg. von Ignacio Angelelli, Olms, Hildesheim, 1990, S. 179–92.
(zitiert: *RH*)

1895 „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“, in: *Kleine Schriften*, hrsg. von Ignacio Angelelli, Olms, Hildesheim, 1990, S. 193–210.
(zitiert: *KBS*)

1903 *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2, Hermann Pohle, Jena.
(zitiert: *GG 2*)

Frege, Gottlob

1953 *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical inquiry into the concept of number*, translated by J. L. Austin, 2. Aufl., Harper, New York.
(zitiert: *FA*)

1983 *Nachgelassene Schriften*, Bd. 1, 2. Aufl., Meiner, Hamburg.
(zitiert: *NS*)

Geach, P. T.

1972 „Quantification theory and the problem of identifying objects of reference", in: *Logic Matters*, University of California Press, Berkeley, S. 139–46.

1980 *Reference and Generality*, 3. Aufl., Cornell University Press, Ithaca.

Githuku, Sammy

2001 „Taboos on counting", in: *Interpreting the Old Testament in Africa*, Bd. 2, hrsg. von Mary Getui, Knut Holter und Victor Zinkuratire, P. Lang, New York, S. 113–8.

Goodstein, R. L.

1956 „The Arabic numerals, numbers and the definition of counting", *The Mathematical Gazette* (40, 332), S. 114–29.

Hale, K. L.

1975 „Gaps in grammar and culture", in: *Linguistics and Anthropology*, hrsg. von M. D. Kinkade, K. L. Hale und O. Werner, The Peter de Ridder Press, Lisse, S. 295–315.

Hammarström, Harald

2010 „Rarities in numeral systems", in: *Rethinking Universals*, hrsg. von Jan Wohlgemuth und Michael Cysouw, De Gruyter, Berlin, S. 11–60.

Harris, John

1982 „Facts and fallacies of Aboriginal number systems", Work Papers of the Summer Institute of Linguistics, Australian Aborigines Branch B 8, *Summer Institute of Linguistics* (Darwin), S. 153–81.

Hartner, Willy

1943 „Zahlen und Zahlensysteme bei Primitiv- und Hochkulturvölkern", *Paideuma* (2, 6/7), S. 268–326.

Hilbert, David und Paul Bernays

1968 *Grundlagen der Mathematik I*, 2. Aufl., Springer, Berlin.

Howitt, A. W.

1889 „Notes on Australian message sticks and messengers“, *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* (18), S. 314–32.

Kalin, E. R.

1971 „Inspired community: A glance at canon history“, *Concordia Theological Monthly* (42, 8), S. 541–9.

Ketland, Jeffrey

2011 „Identity and indiscernibility“, *The Review of Symbolic Logic* (4, 2), S. 171–85.

Kleene, S. C.

1967 *Mathematical Logic*, Wiley, New York.

Koslicki, Kathrin

1997 „Isolation and non-arbitrary division: Frege’s two criteria for counting“, *Synthese* (112, 3), S. 403–30.

2006 „Nouns, mass and count“, in: *Encyclopedia of Philosophy*, hrsg. von D. M. Borchert, 2. Aufl., Thomson Gale, Detroit, S. 659–66.

Krifka, Manfred

1991 „Massennomina“, in: *Semantik*, hrsg. von Arnim von Stechow und Dieter Wunderlich, HSK 6, De Gruyter, Berlin, S. 399–417.

Ladyman, James

2005 „Mathematical structuralism and the identity of indiscernibles“, *Analysis* (65, 3), S. 218–21.

Laycock, Henry

2006 „Mass nouns, count nouns, and non-count nouns: Philosophical aspects“, in: *Encyclopedia of Languages and Linguistics*, hrsg. von Keith Brown, Elsevier, Oxford, S. 534–8.

Lévy-Bruhl, Lucien

1910 *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Les Presses Universitaires de France, Paris.

Menninger, Karl

1958 *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, 2 Bde. 2. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Mittag-Leffler, Gösta

1920 „Die Zahl. Einleitung zur Theorie der analytischen Funktionen“, *Tôhoku Mathematical Journal* (17), S. 157–209.

Owens, Kay

2001 „The work of Glendon Lean on the counting systems of Papua New Guinea and Oceania“, *Mathematics Education Research Journal* (13, 1), S. 47–71.

Parker, Henry

1909 *Ancient Ceylon: An account of the Aborigines and of part of the early civilisation*, Luzac, London.

Parsons, Charles

2008 *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pitra, J. B.

1852 *Spicilegium solesmense complectens sanctorum patrum scriptorumque ecclesiasticorum anecdota hactenus opera, selecta e graecis orientalibusque et latinis codicibus*, Bd. 1, Firmin Didot Fratres, Paris.

Quine, W. V. O.

1945 „On the logic of quantification“, *The Journal of Symbolic Logic* (10), S. 1–12.

1960 *Word and Object*, MIT Press, Cambridge (Mass).

1969a „Ontological relativity“, in: *Ontological Relativity and other essays*, Columbia University Press, New York, S. 26–68.

1969b *Set Theory and Its Logic*, 2. Aufl., The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1976 „Grades of discriminablity“, in: *Theories and Things*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1981, S. 129–33.

Roth, W. E.

1897 *Ethnological Studies Among the North-West-Central Queensland Aborigines*, Brisbane.

1908 „Miscellaneous papers (= North Queensland Ethnography, Bulletin No. 11)“, *Records of the Australian Museum* (7, 2), S. 74–107.

Russell, Bertrand

1903 *The Principles of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York.

Schulte, Joachim

1990 „Chor und Gesetz: Zur ‚morphologischen Methode‘ bei Goethe und Wittgenstein“, in: *Chor und Gesetz*, Suhrkamp, Frankfurt a. M., S. 11–42.

Seidenberg, Abraham

1960 *The Diffusion of Counting Practices*, University of California Press, Berkeley.

1962 „The ritual origin of counting“, *Archive for History of Exact Sciences* (2, 1), S. 1–40.

Seligman, C. G. und B. Z. Seligmann

1911 *The Veddas*, Cambridge University Press, Cambridge.

Shapiro, Stewart

1997 *Philosophy of Mathematics. Structure and ontology*, Oxford University Press, Oxford.

2008 „Identity, indiscernibility, and ante rem structuralism: The tale of *i* and *-i*“, *Philosophia Mathematica* (16, 3), S. 285–309.

Stokes, Judith

1982 „A description of the mathematical concepts of Groote Eylandt Aborigines“, Work Papers of the Summer Institute of Linguistics, Australian Aborigines Branch B 8, *Summer Institute of Linguistics* (Darwin), S. 33–56.

Strehlow, T. G. H.

1944 *Aranda Phonetics and Grammar*, Australian National Research Council, Sydney.

Thomas von Aquin

1820 *Summa Theologica*, Bd. $1/1^a$, Marietti, Turin.
(zitiert: *Summa Theologica* I)

Watanabe, Akira

2006 „Functional projections of nominals in Japanese: Syntax of classifiers“, *Natural Language & Linguistic Theory* (42, 1), S. 241–306.

Whitehead, A. N.

1911 „Mathematics“, in: *The Encyclopædia Britannica*, hrsg. von Hugh Chisholm, 11. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge, S. 878–83.

Williamson, Timothy

2013 *Identity and Discrimination*, neu überarb. Aufl. Wiley, Malden.

Wittgenstein, Ludwig

1967 „Bemerkungen über Frazers ‚The Golden Bough'", kurz eingef. durch Rush Rhees, *Synthese* (17, 3), S. 233–53.
(zitiert: *BF*)

1979 *Notebooks 1914–1916*, hrsg. von G. H. v. Wright und G. E. M. Anscombe, 2. Aufl., Blackwell, Oxford.
(zitiert: *NB*)

1984a *Philosophische Grammatik*, Werkausgabe Bd. 4, Suhrkamp, Frankfurt a. M.
(zitiert: *PG*)

1984b *Vermischte Bemerkungen*, Werkausgabe Bd. 8, Suhrkamp, Frankfurt a. M.
(zitiert: *VB*)

1989 *Logisch-philosophische Abhandlung: Kritische Edition*, hrsg. von Brian McGuinness und Joachim Schulte, Suhrkamp, Frankfurt a. M.
(zitiert: *LPA*)

Yamamoto, Kasumi

2005 *The Acquisition of Numeral Classifiers. The case of Japanese children*, De Gruyter, Berlin.

Zaslavsky, Claudia

1999 *Africa Counts. Number and pattern in African cultures*, 3. Aufl., Lawrence Hill Books, Chicago.